

انتهاك النكهة اللبتونية في تفكك البوزون القياسي Z وفق النموذج المتأرجح فائق التناظر من النوع الأول

مرهف السّيد علي، د.وائل حاج أحمد

قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة إدلب

الملخص:

تبحث هذه الدراسة عن انتهاك النكهة اللبتونية (LFV) لتفكك البوزون Z إلى لبتونين مشحونين من نكهتين مختلفتين: $Z \rightarrow l_i l_j$ ($Z \rightarrow \tau\mu$, $Z \rightarrow \tau e$, $Z \rightarrow \mu e$). تمّ هذا العمل في إطار النموذج القياسي الفائق التناظر الأصغري المقيد (CMSSM) والممدد بآلية التّأرجح الفائقة التناظر من النوع الأول (SUSY Seesaw Type-I). حسبنا نسب التفرع لانتهاك النكهة اللبتونية لتفككات البوزون Z بعد الأخذ بعين الاعتبار القيود المفروضة من الحدود التجريبية الحالية لكتل النيوترينو والجسيمات فائقة التناظر. وُجد أن النتائج العددية هي 1×10^{-9} لكلٍ من القناتين $\tau\mu$ و τe ، و 5×10^{-10} لقناة μe . بعد تطبيق القيود من الحدود التجريبية على التفككات الإشعاعية ($l_i \rightarrow l_j \gamma$)، تحصل نسب التفرع لتفككات LFV للبوزون Z على قمع إضافي قدره 10^{-3} للقناتين $\tau\mu$ و τe ، و 10^{-8} لقناة μe . توقعاتنا لنسب التفرع أقل بعدة مراتب من الحدود التجريبية الحالية.

الكلمات المفتاحية: انتهاك النكهة اللبتونية، النموذج MSSM، آلية التّأرجح من النوع الأول.

Lepton Flavor Violation of Z Gauge Boson Decays in Supersymmetric Type-I Seesaw Model

Murhaf Alsayed Ali and Vael Hajahmad

Physics Department, Idlib University, Syria.

– Abstract:

In this study, we investigate the lepton flavor violation (LFV) of Z gauge boson decaying into two different flavor charged leptons $Z \rightarrow l_i l_j$ ($Z \rightarrow \tau\mu$, $Z \rightarrow \tau e$ and $Z \rightarrow \mu e$). This work is performed in the framework of the constrained minimal supersymmetric standard model (CMSSM) which is extended by the type-I seesaw mechanism. By considering constraints from the current experimental bounds on neutrino and supersymmetric particle masses, we calculate the branching ratios of the LFV of Z boson decays. The numerical results are found to be 1×10^{-9} for both the $\tau\mu$ and τe decay channels and 5×10^{-10} for the μe channel. After applying the constraints from the experimental bounds on the radiative two body decays ($l_i \rightarrow l_j \gamma$), the branching ratios of the LFV of Z boson decays get an additional suppression of 10^{-3} for the $\tau\mu$ and τe decay channels and 10^{-8} for the μe channel. Our prediction of the branching ratios is several orders of magnitude below the current experimental bounds.

Keywords: Lepton Flavor Violation, MSSM Model, Type-I Seesaw Mechanism.

يوجد ثلاثة أجيال (نكهات Flavors) للبتونات في النموذج القياسي (Standard Model) لفيزياء الجسيمات. كما يكون كل من العدد اللبوني والنكهة اللبونية لكل جيل محفوظين في تفاعلات اللبتونات، حيث تكون النترينوات عديمة الكتلة. ومع ذلك، لا يمكن اعتبار هذا الانحفاظ مبدأً مسلماً به في النموذج القياسي، إذ تشير تجارب اهتزاز النترينو إلى أنَّ التفاعلات التي تنتهك هذا الانحفاظ تحدث في الطبيعة [1][2]. أظهرت تجارب اهتزاز النترينو بأن جسيمات النترينو لديها كتلة صغيرة، وبالتالي فإن انتهاك النكهة اللبونية (Lepton Flavor Violation-LFV) يمكن أن يحدث في قطاع النترينو. وهذا يعتبر في الوقت الحالي الدليل التجريبي الأكثر وضوحاً على أن النموذج القياسي غير كافٍ لشرح البيانات ويحتاج إلى تمديد باستعمال آليات جديدة [3]. إن أكثر الأفكار شيوعاً لتوليد كتل النترينو هي آلية التآرجح (Seesaw Mechanism). يمكن تصنيف آلية التآرجح إلى ثلاثة أنواع رئيسية: النوع الأول (Seesaw Type-I)، النوع الثاني (Seesaw Type-II)، والنوع الثالث (Seesaw Type-III). يقدم النموذج الأول والثالث ثلاث فرميونات في الحالة الأحادية (ثلاثية) [4][5]، بينما يقدم النموذج الثاني ثلاثية سلمية (Triplet Scalar) [6] [7].

تُعد دراسة تفاعلات انتهاك النكهة اللبونية من الأبحاث المتقدمة لاستكشاف الفيزياء الحديثة (فيزياء ما بعد النموذج القياسي Beyond SM) [8]. يوجد مجموعة من تفاعلات انتهاك النكهة اللبونية والتي تُدرس وتشمل تفككات كل من اللبتونات، البوزون Z ، بوزون هيگز، والبوزون Z ، وتفككات هادرونات مختلفة [9][10]. لم يكشف تجريبياً حتى الآن عن أي تفاعل يظهر انتهاك النكهة اللبونية، حيث أن الأبحاث التجريبية تزداد فقط بالحدود العليا لمثل هذه التفاعلات [1][2].

يوجد العديد من النماذج الفيزيائية الجديدة والتي يمكن أن تزداد فيها نسب التفرع (Branching Ratios) لتفاعلات انتهاك النكهة اللبونية حتى تصبح ضمن مجال الكشف للتجارب الحالية. من هذه النماذج: نماذج التوحيد الأعظمي (Grand Unified)، نموذج ثنائيات بوزون هيگز (Higgs Boson Doublets)، نماذج التناظر الفائق (Super Symmetry) [11].

تقدم نماذج التناظر الفائق حلاً لمشكلة التسلسل الهرمي، ومشكلة وجود المادة المظلمة غير الباريونية (DM) في الكون. إذا وجد مصادم الهادرونات الكبير (Large Hadron Collider) إشارات عن التناظر الفائق، فسيكون من الجيد تضمين آلية التآرجح في إطار التناظر الفائق. ربما تُشير هذه النماذج إلى إمكانية وجود انتهاك للنكهة اللبتونية في تفككات كل من البوزون Z ، وبوزون هيگز، وتفككات اللبتونين تاو وميون [12].

إنّ تنبؤات النموذج القياسي لانتهاك النكهة اللبتونية في تفككات البوزون Z الثلاث ($Z \rightarrow \tau\mu$ ، $Z \rightarrow \tau e$ و $Z \rightarrow \mu e$) تكون غير ممكنة لعدم أخذ كتلة النترينو بعين الاعتبار. وبالتالي فإنه لا يمكن الكشف عنها من خلال التجارب الحالية في المصادم (LHC) (تجارب أطلس و CMS). عند الأخذ بعين الاعتبار كتل النترينو، فإن تنبؤات النموذج القياسي لهذه التفككات تتراوح من 10^{-50} إلى 10^{-40} . لذا، فإن أي اكتشاف تجريبي لتفككات Z LFV سيشير إلى وجود فيزياء جديدة [13]. يبين الجدول (1) الحدود العليا التجريبية لـ BRs لقنوات تفكك البوزون Z ($Z \rightarrow \tau\mu$ ، $Z \rightarrow \tau e$ و $Z \rightarrow \mu e$) وفقاً للنتائج الحديثة لتجربة ATLAS [1][14] والحساسية المتوقعة للمصادمات المستقبلية (FCC-ee/CEPC) [15][16].

الجدول (1): الحدود العليا التجريبية والحساسية المتوقعة لنسب تفرع انتهاك النكهة اللبتونية في تفكك البوزون Z .

| المصادم | LHC (95% CL) | FCC-ee/CEPC |
|-----------------------------|-----------------------|----------------------|
| $BR(Z \rightarrow \tau e)$ | 7.00×10^{-6} | 10^{-9} |
| $BR(Z \rightarrow \tau\mu)$ | 7.20×10^{-6} | 10^{-9} |
| $BR(Z \rightarrow \mu e)$ | 2.62×10^{-7} | $10^{-8} - 10^{-10}$ |

سنركز في دراستنا على تفككات البوزون Z إلى نكهتين لبتونيتين مختلفتين ($Z \rightarrow l_i l_j$) حيث أنّ $l_i, l_j = e, \mu, \tau$. وسنقوم بإجراء تحليل للنتائج في إطار السيناريو المقيد للنموذج القياسي فائق التناظر الأصغري (Constrained Minimal Supersymmetric Standard Model) الذي يمدد بنموذج آلية التآرجح من النوع الأول (MSSM-Seesaw Type-I). تُحفز امتزاجات (Mixings) اللبتونات فائقة التناظر في نماذج آلية التآرجح

فائقة التناظر تفاعلات انتهاك النكهة اللبتونية $l_i \bar{l}_j V$ حيث أن $(V = Z, \gamma)$. نتيجةً لذلك، فإنه يوجد ارتباط بين نسب التفرع BRs لتفككات البوزون Z وبين التفككات الإشعاعية $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ [17][18][19]. سنأخذ بعين الاعتبار في هذه الدراسة الحدود التجريبية لكل من كتل الجسيمات الفائقة التناظر ونسب التفرع لتفككات الإشعاعية $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ وذلك بهدف تقييد معاملات النموذج المدروس ومن ثم تقدير قيم نسب التفرع لتفكك البوزون Z $(Z \rightarrow l_i l_j)$.

أجريت دراسات سابقة حول انتهاك النكهة اللبتونية في تفككات البوزون Z في النموذج MSSM باستخدام معاملات كسر التناظر الفائق العامة [18][20]. بالإضافة إلى دراسات أخرى في نماذج مختلفة، مثل النموذج الأصغري (331)، نموذج سكوتوجينيك (Scotogenic Model)، ونموذج التمديد $U(1)$ للنموذج MSSM. تتبأت هذه الدراسات بأن قيم كل من $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$ و $BR(Z \rightarrow \tau e)$ تتراوح من 10^{-8} حتى 10^{-16} ، بينما تتراوح قيم $BR(Z \rightarrow \mu e)$ من 10^{-13} حتى 10^{-19} [15] [21] [22].

2- أهمية البحث وأهدافه:

قد تكون ملاحظة انتهاك النكهة اللبتونية إحدى أكثر العلامات وضوحاً على وجود الفيزياء الجديدة (فيزياء ما وراء النموذج القياسي). هذه التفاعلات يمكن أن تتحقق في حالة تفكك بوزون هيغز أو بوزون Z أو بوزونات أخرى إلى أزواج من اللبتونات بنكهات مختلفة. تهدف هذه الدراسة إلى البحث عن فيزياء جديدة من خلال إيجاد أدلة على انتهاك النكهة اللبتونية في تفكك البوزون Z ضمن النموذج MSSM المقيد والممدد بآلية التآرجح من النوع الأول، إضافة إلى البحث عن تفككات نووية جديدة للبوزون Z في التفاعلات النووية الضعيفة.

3- النموذج MSSM-Seesaw Type-I:

في هذه الحالة ستضاف ثلاثة أجيال من حقول النترينو الفائقة اليمنى الثقيلة $\hat{\nu}$ (نترينوات ماجورانا) إلى طيف جسيمات النموذج MSSM. تمتلك الحقول المضادة الأعداد

الكمومية $(1, 1, 0)$ تحت الزمرة المعيارية $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ للنموذج القياسي، وبالتالي تكون مفردة تحت الزمرة $SU(2)_L$ [23] [17]. ومنه سيضاف حد جديد إلى معادلة الكمون الفائق (Superpotential) للنموذج MSSM. يكتب الكمون الفائق الكلي بالشكل التالي:

$$W = W_{MSSM} + W_{Seesaw-I} \quad (1)$$

تمثل W_{MSSM} الكمون الفائق للنموذج MSSM، أما $W_{Seesaw-I}$ فتمثل الكمون الفائق لنموذج آلية التآرجح من النوع الأول فائق التناظر (SUSY Type-I Seesaw). يكتب $W_{Seesaw-I}$ بالشكل التالي:

$$W_{Seesaw-I} = \frac{1}{2} M_R \hat{\nu} \hat{\nu} + Y_\nu \hat{\nu} \hat{L} \hat{H}_u \quad (2)$$

إذ تمثل \hat{L} حقل اللبتونات اليسارية فائق التناظر، وتمثل \hat{H}_u حقل هيجز العلوي فائق التناظر. كما تمثل M_R مصفوفة كتلة النترينو اليميني الثقيل (نترينو ماجورانا)، وهي مصفوفة 3×3 . أما Y_ν فتمثل مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو، وهي مصفوفة 3×3 وعقدية بشكل عام [17][24]. عند مقياس طاقة أدنى من مقياس أخف نترينو يميني $\hat{\nu}$ ، فإنه يمكن دمج كل الحقول الثقيلة وبالتالي ينتج الكمون الفائق الفعال كما في المعادلة التالية:

$$W_{eff-I} = W_{MSSM} + \frac{1}{2} k_\nu \hat{L} \hat{L} \hat{H}_u \hat{H}_u \quad (3)$$

$$k_\nu = -Y_\nu^t (M_R)^{-1} Y_\nu \quad \text{حيث أن:}$$

يمثل الحد الثاني من المعادلة (3) مؤثر فاينبرغ والذي يزوج في حالته فائقة التناظر بين اثنين من الحقول اللبتونية اليسارية فائقة التناظر مع اثنين من حقول هيجز العلوية فائقة التناظر [24] [25]. تنتج مصفوفة كتلة النترينو الخفيف بعد كسر التناظر الكهروضعيف، كما في المعادلة التالية:

$$m_\nu = \frac{v_u^2}{2} k_\nu = -\frac{v_u^2}{2} Y_\nu^t (M_R)^{-1} Y_\nu \quad (4)$$

تُظهر هذه المصفوفة بواسطة المصفوفة U^V (مصفوفة PMNS):

$$U^{V,*} m_\nu U^{V,\dagger} = \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3})$$

تتعلق المعادلة (4) بكل من مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو Y_ν ومصفوفة كتلة نترينو ماجورانا الثقيل M_R ، وبالتالي إذا كانت $Y_\nu \sim \mathcal{O}(1)$ فإن $M_R \sim \mathcal{O}(10^{15}) \text{ GeV}$ [24][26]. نحتاج من أجل حساب كتلة النترينو عند مقياس الطاقات المنخفضة معرفة قيم كل من M_R, Y_ν كمعاملات إدخال تحدد عند مقياس طاقة نظرية التوحيد العظمى (Grand Unified Theory) والذي يكون من مرتبة 10^{16} GeV .

نفرض الشروط الشاملة عند مقياس طاقة نظرية التوحيد العظمى (M_{GUT}) باستخدام النموذج القياسي فائق التناظر الأصغري المقيد (CMSSM) وهي:

كتلة كسر التناظر الناعم (Soft-Breaking) السلمية العالمية m_0 ، كتلة كسر التناظر الناعم للجيجينو العالمية $m_{1/2}$ ، الاقتران الثلاثي الخطي العالمي A_0 [12][26]. بينما يحدد كل من النسبة المتوقعة في الفراغ لبوزون هيگز $\tan\beta$ وإشارة معامل امتزاج هيگز $\text{sign}(\mu)$ عند المقياس الكهروضعيف [27].

4- بنية مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو Y_ν :

إن ثابتي اقتران يوكاوا للبتونات Y_l وللنترينو Y_ν عبارة عن مصفوفات غير قطرية، ولكن بشكل عام يعتبر أن Y_l مصفوفة قطرية و Y_ν مصفوفة غير قطرية. وهذا يعزز من انتهاك النكهة اللبتونية والتي يمكن ملاحظتها عند الطاقات المنخفضة. في هذه الحالة تكون مصفوفة كتلة اللبتونات فائقة التناظر قطرية عند مقياس GUT، لكن إدخال معادلات إعادة التنظيم (Renormalization Group Equations-RGEs) من مقياس GUT إلى مقياس كتلة ماجورانا الثقيل M_R يؤدي لكسر هذه القطرية [17]. تمثل المساهمة في امتزاج اللبتونات فائقة التناظر عند الحلقة الواحدة بمعادلات إعادة التنظيم التالية [17] [28]:

$$\left. \begin{aligned} (\Delta m_L^2)_{ij} &= -\frac{1}{8\pi^2} m_0^2 \left\{ 3 + \frac{A_0^2}{m_0^2} \right\} (Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} \log \left(\frac{M_{GUT}}{M_R} \right) & a \\ (\Delta T_L^2)_{ij} &= \frac{-3}{16\pi^2} A_0 Y_l (Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} \log \left(\frac{M_{GUT}}{M_R} \right) & b \\ (\Delta m_e^2)_{ij} &= 0 & c \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

حيث أنَّ: $\frac{A_0}{m_0} = a_0 = const$ ، حيث a_0 ثابت لا وحدة له. وبالتالي $A_0 = a_0 m_0$.

نلاحظ من المعادلة (5-a) أن مصفوفة كتلة اللبتونات اليسارية فائقة التناظر تتلقى مساهمة إضافية من معادلات RGEs عند التشغيل من مقياس GUT إلى مقياس كتلة ماجورانا M_R لعناصرها الغير قطرية وذلك في تقريب اللوغاريتم العشري [28]. كما نلاحظ من المعادلة (5-c) أنَّ معاملات اللبتونات فائقة التناظر اليمنى لا تتلقى أي مساهمة في تقريب اللوغاريتم العشري، وهكذا فإن LFV يكون في قطاع اللبتونات فائقة التناظر اليسارية [12][29][30][31] بسبب وجود حقل النترينو الفائق التناظر اليميني في معادلة الكمون الفائق. إضافة إلى ذلك، نلاحظ من المعادلة (5-b) أن معاملات الاقتران الثلاثي الخطي تكون مقموعة من قبل كتل اللبتونات المشحونة [30][31][32].

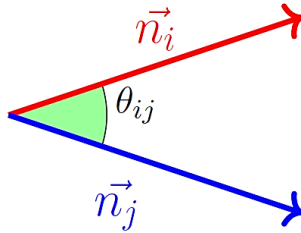
نحتاج إلى تحديد بنية مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو Y_ν مع الأخذ بعين الاعتبار مساهمة هذه المصفوفة في انتهاك النكهة اللبتونية كما هو واضح في معادلات RGEs. كما سنأخذ في الاعتبار القيم الحقيقية لمصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو Y_ν من أجل تجنب القيود المحتملة من عزوم ثنائي القطب الكهربائي اللبتوني ($Y_\nu^\dagger Y_\nu = Y_\nu^t Y_\nu$). من المفيد النظر في تفسير هندسي لمصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو، إذ تُعَسَّر عناصرها في فضاء النكهة كمركبات لثلاثة متجهات للنترينو ($\mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_e, \mathbf{n}_\tau$). يمكن كتابة المصفوفة Y_ν في فضاء النكهة بالشكل الآتي [3][33]:

$$Y_\nu = \begin{pmatrix} y_{\nu 11} & y_{\nu 12} & y_{\nu 13} \\ y_{\nu 21} & y_{\nu 22} & y_{\nu 23} \\ y_{\nu 31} & y_{\nu 32} & y_{\nu 33} \end{pmatrix} \equiv f(\mathbf{n}_e, \mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_\tau) \quad (6)$$

حيث تمثل f شدة اقتران يوكاوا للنترينو. إن الجداء $Y_\nu^t Y_\nu$ الموجود في معادلات RGEs يرتبط بعمليات انتهاك النكهة اللبتونية. يمكن كتابة الجداء $Y_\nu^t Y_\nu$ بالشكل الآتي:

$$Y_V^t Y_V = f \begin{pmatrix} \mathbf{n}_e \\ \mathbf{n}_\mu \\ \mathbf{n}_\tau \end{pmatrix} \cdot f(\mathbf{n}_e \ \mathbf{n}_\mu \ \mathbf{n}_\tau) = f^2 \begin{pmatrix} |\mathbf{n}_e|^2 & \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\mu & \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\tau \\ \mathbf{n}_\mu \cdot \mathbf{n}_e & |\mathbf{n}_\mu|^2 & \mathbf{n}_\mu \cdot \mathbf{n}_\tau \\ \mathbf{n}_\tau \cdot \mathbf{n}_e & \mathbf{n}_\tau \cdot \mathbf{n}_\mu & |\mathbf{n}_\tau|^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

حيث أن: $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = |\mathbf{n}_i| \cdot |\mathbf{n}_j| C_{ij}$ تمثل $C_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ تجيب الزوايا بين نكهات النترينو الثلاث $C_{\tau\mu}, C_{\mu e}, C_{\tau e}$ كما في الشكل (1). تُعتمد تسمية الزوايا على حقيقة أن جيب تمام الزاوية θ_{ij} يتحكم في انتقالات انتهاك النكهة اللبتونية ضمن القطاع $l_i - l_j$. بناءً عليه، يمكن اعتبار معاملات الإدخال التسعة التي تحدد المصفوفة Y_V على النحو التالي: ثلاث قيم لطويلة متجهات النترينو الثلاث $(|\mathbf{n}_e|, |\mathbf{n}_\mu|, |\mathbf{n}_\tau|)$ ، وثلاث زوايا بين هذه المتجهات مرتبطة بنكهات النترينو الثلاث $(\theta_{\tau\mu}, \theta_{\mu e}, \theta_{\tau e})$ ، إضافة إلى ثلاث زوايا إضافية $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ والتي تحدد عملية الدوران الكلي (O) للمتجهات الثلاثة للنيوترينو دون تغيير الزوايا المرتبطة بالنكهات [3][33].



الشكل - 1: الزاوية بين نكهات النترينو الثلاث.

بما أن قيم المصفوفة Y_V حقيقية، لذلك فإنه يمكن كتابة المصفوفة Y_V على أنها حاصل ضرب مصفوفتين بالشكل التالي:

$$Y_V = O \cdot A \quad (8)$$

تمثل O مصفوفة الدوران المتعامدة ولا تدخل في الجداء $Y_V^t Y_V$ حيث أن $O^t O = I$ ، وبالتالي فهي لا تؤثر على دراسة انتهاك النكهة اللبتونية [3][33]. بينما تحدد عناصر المصفوفة A وفقاً لثلاثة سيناريوهات محتملة: تاو-إلكترون (τe)، تاو-ميون ($\tau \mu$)، ميون-إلكترون (μe). في سيناريو τe ، نعوض $C_{\tau\mu} = C_{\mu e} = 0$ في المعادلة (7) حيث أن كل من $(\mathbf{n}_\tau, \mathbf{n}_\mu)$ و $(\mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_e)$ أشعة متعامدة، فنحصل على المعادلة التالية:

$$Y_v^t Y_v = f^2 \begin{pmatrix} |n_e|^2 & 0 & |n_\tau| \cdot |n_e| C_{\tau e} \\ 0 & |n_\mu|^2 & 0 \\ |n_\tau| \cdot |n_e| C_{\tau e} & 0 & |n_\tau|^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

يمكن كتابة مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو من أجل السيناريو τe بالشكل الآتي:

$$Y_{v_{\tau e}} = \mathcal{O} \cdot A_{\tau e} = \mathcal{O} \cdot f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & |n_\tau| C_{\tau e} \\ 0 & |n_\mu| & 0 \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau e}^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

نحصل على المعادلة (7) عند حساب ناتج الجداء $Y_v^t Y_v$. وبالتالي في هذه الحالة تكتب المصفوفة $A_{\tau e}$ بالشكل الآتي:

$$A_{\tau e} = f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & |n_\tau| C_{\tau e} \\ 0 & |n_\mu| & 0 \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau e}^2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

في سيناريو $\tau\mu$ ، نعوض $C_{\tau e} = C_{\mu e} = 0$ في المعادلة (7) حيث أن كل من (n_τ, n_e) و (n_μ, n_e) أشعة متعامدة. في هذه الحالة، تكتب مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو بالشكل الآتي:

$$Y_{v_{\tau\mu}} = \mathcal{O} \cdot A_{\tau\mu} = \mathcal{O} \cdot f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & 0 \\ 0 & |n_\mu| & |n_\tau| C_{\tau\mu} \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau\mu}^2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

أما المصفوفة $A_{\tau\mu}$ ، فتكتب بالشكل الآتي:

$$A_{\tau\mu} = f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & 0 \\ 0 & |n_\mu| & |n_\tau| C_{\tau\mu} \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau\mu}^2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

بينما في سيناريو μe ، نعوض $C_{\tau e} = C_{\tau\mu} = 0$ في المعادلة (7) حيث أن كل من (n_τ, n_e) و (n_τ, n_μ) أشعة متعامدة. في هذه الحالة، تكتب مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو بالشكل الآتي:

$$Y_{\nu_{\mu e}} = O.A_{\mu e} = O.f \begin{pmatrix} |n_e| \sqrt{1 - C_{\mu e}^2} & 0 & 0 \\ |n_e| C_{\mu e} & |n_\mu| & 0 \\ 0 & 0 & |n_\tau| \end{pmatrix} \quad (14)$$

أما المصفوفة $A_{\mu e}$ ، فتكتب بالشكل الآتي:

$$A_{\mu e} = O.f \begin{pmatrix} |n_e| \sqrt{1 - C_{\mu e}^2} & 0 & 0 \\ |n_e| C_{\mu e} & |n_\mu| & 0 \\ 0 & 0 & |n_\tau| \end{pmatrix} \quad (15)$$

قد يُنتج سيناريو $\tau\mu$ معدلات عالية للانتقالات $\tau - \mu$ ، ولكنه يُعطي دائماً مساهمات ضئيلة في $LFV_{\tau e}$ و $LFV_{\mu e}$. بينما قد يُنتج سيناريو τe معدلات كبيرة للانتقالات $\tau - e$ ، ولكنه يُعطي دائماً مساهمات ضئيلة في $LFV_{\tau\mu}$ و $LFV_{\mu e}$. بينما يُنتج سيناريو ME معدلات عالية فقط للانتقالات $\mu - e$ [33].

5- انتهاك النكهة اللبتونية في تفكك البوزون $Z \rightarrow l_i l_j$:

يُحَفِّز امتزاج نكهة اللبتونات فائقة التناظر المشحونة اقترانات التيار المحايد المُعَيَّر للنكهة (Flavor-Changing Neutral-Current Couplings) $\tilde{\chi}^0 \tilde{l} \tilde{l}$ و $Z, \tilde{l} \tilde{l}$ ، بينما يُحَفِّز امتزاج نكهة النترينوات الفائقة التناظر اليسرى اقترانات التيار المشحون المُعَيَّر للنكهة (Flavor-Changing Charged-Current Couplings) $\tilde{\chi}^+ \tilde{l} \tilde{\nu}$. تُساهم هذه الاقترانات المُعَيَّرة للنكهة في تفككات انتهاك النكهة اللبتونية للبوزون Z [17][34]، كما هو موضح في الشكل (2). يُمكن كتابة لاغرانجيان تفككات انتهاك النكهة اللبتونية للبوزون Z على النحو التالي [9][35]:

$$\mathcal{L}_{Zl_i l_j} = \bar{l}_j [\gamma^\mu (A_1^L P_L + A_1^R P_R) + p^\mu (A_2^L P_L + A_2^R P_R)] l_i Z_\mu \quad (16)$$

إذ تمثل γ^μ مصفوفات ديراك (مصفوفات غاما)، أما $(1 \pm \gamma^5)$ فإنها تمثل مؤثر الإسقاط اليساري واليميني، وتمثل p المركبة الرابعة لكمية الحركة للبتون l_j . بينما تمثل Z_μ حقل البوزون Z . أما المعاملات $A_1^L, A_1^R, A_2^L, A_2^R$ فيمكن حسابها من ساعات

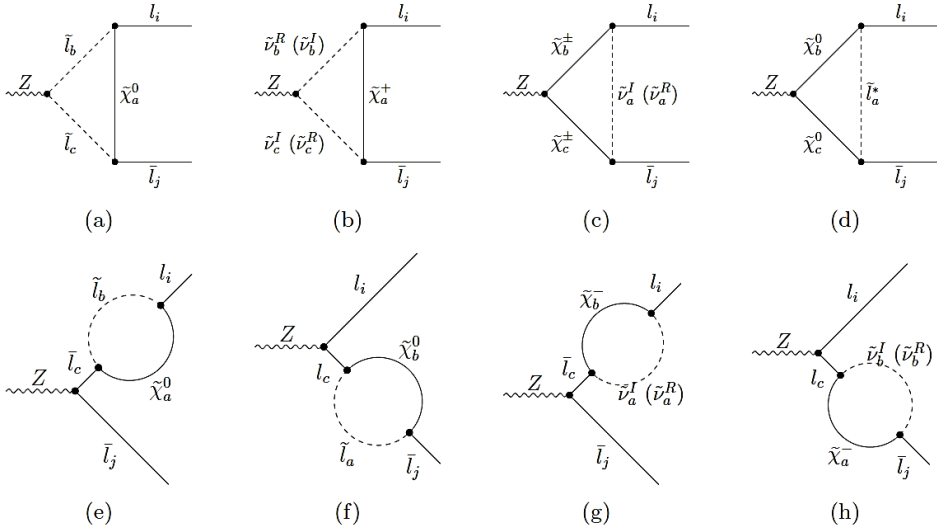
مخططات فاينمان الموضحة في الشكل (2). بإهمال كتل الليبتونات المشحونة، يمكننا كتابة معادلة نسبة التفرع لتفككات انتهاك النكهة الليبتونية للبوزون Z كما يلي [9] [35] [36]:

$$BR(Z \rightarrow l_i l_j) = BR(Z \rightarrow l_i \bar{l}_j) + BR(Z \rightarrow \bar{l}_i l_j) \quad (17)$$

$$BR(Z \rightarrow l_i l_j) = \frac{\Gamma(Z \rightarrow l_i \bar{l}_j) + \Gamma(Z \rightarrow \bar{l}_i l_j)}{\Gamma_Z} = \frac{\Gamma(Z \rightarrow l_i l_j)}{\Gamma_Z} \quad (18)$$

تمثل Γ_Z العرض الطاقى الكلي لتفكك البوزون Z ($\Gamma_Z = 2.4952 \text{ GeV}$) [37]. بينما نكتب العرض الطاقى الجزئى $\Gamma(Z \rightarrow l_i l_j)$ بالشكل الآتى [35] [36]:

$$\Gamma(Z \rightarrow l_i l_j) = \frac{m_Z}{48\pi} [2(|A_1^L|^2 + |A_1^R|^2) + \frac{m_Z^2}{4} (|A_2^L|^2 + |A_2^R|^2)] \quad (19)$$



الشكل - 2: مساهمة مخططات فاينمان للحلقة الواحدة في نسبة التفرع لانتهاك النكهة الليبتونية في تفككات البوزون Z ضمن النموذج MSSM-Seesaw-III .

تمثل المعاملات $A_1^{L,R}, A_2^{L,R}$ مجموع المعاملات المقابلة لمساهمة كل مخطط من مخططات فاينمان في انتهاك النكهة الليبتونية في البوزون Z الموضحة بالشكل (2). ومنه نكتب:

$$A_1^{L/R} = A_{1a}^{L/R} + A_{1b}^{L/R} + A_{1c}^{L/R} + A_{1d}^{L/R} + A_{1e}^{L/R} + A_{1f}^{L/R} + A_{1g}^{L/R} + A_{1h}^{L/R} \quad (20)$$

$$A_2^{L/R} = A_{2a}^{L/R} + A_{2b}^{L/R} + A_{2c}^{L/R} + A_{2d}^{L/R} + A_{2e}^{L/R} + A_{2f}^{L/R} + A_{2g}^{L/R} + A_{2h}^{L/R} \quad (21)$$

تستنتج مساهمات حلقات النترالينو-اللبتونيات فائقة التناظر من الشكل 2 (a, d, e, f)، بينما تستنتج مساهمات حلقات الشارجينو-النترينوات فائقة التناظر من الشكل 2 (b, c, g, h). إن العلاقات الرياضية لمساهمات مخططات فاينمان (المعادلة 20، 21) موجودة في المقالة المنشورة في المجلة البرازيلية [38].

6- النتائج العددية والمناقشة:

تم الحصول على النتائج العددية بواسطة حزم البرمجيات التالية: ساره (SARAH)، سفينو (SPHeno) وحزمة برمجيات انتهاك النكهة اللبونية (FlavorKit). كما طبقت معادلات RGE ثنائية الحلقات (Two-Loops) [39][40][41][42]. وفقاً للنموذج الفيزيائي CMSSM-Seesaw-I المستخدم في هذه الدراسة، فإن معاملات الإدخال النهائية هي: m_0 ، $m_{1/2}$ ، A_0 ، $\tan\beta$ ، f ، $|n_\tau|$ ، $|n_\mu|$ ، $|n_e|$ ، $C_{\tau\mu}$ ، $C_{\tau e}$ ، $C_{\mu e}$ ، M_R ، Y_ν ، و $\text{sign}(\mu)$. عند إجراء الحسابات العددية، تُقيد معاملات كسر التناظر الناعم بالعديد من الشروط النظرية والتجريبية. مثل انحفاظ الزوجية-R (R-Parity)، وأخف جسيم من جسيمات التناظر الفائق (SUSY) في النموذج المدروس هو النترالينو.

الجدول (2): الحدود الدنيا التجريبية لكتل الجسيمات فائقة التناظر.

| الجسيمة | اللبتونيات فائقة التناظر | النترالينو | الشارجينو | النترينوات فائقة التناظر |
|-----------------|--------------------------|------------|-----------|--------------------------|
| حد الكتلة (GeV) | 107 | 46 | 94 | 94 |

إضافة إلى ذلك، يجب أن تكون كتل جسيمات التناظر الفائق (الشارجينو، النترالينو، اللبتونات فائقة التناظر، والنترينوات فائقة التناظر) والتي تُحسب بواسطة الحزمة SPHeno أعلى أو تساوي الحدود الدنيا التجريبية لكتل الجسيمات لنتائج التجارب في الوقت الحالي [37]، كما هو موضح في الجدول (2).

ترتبط كتل جسيمات التناظر الفائق بكل من $m_{1/2}$ ، m_0 ، لذلك سنحدد القيمة الدنيا لكل منهما تبعاً للشروط السابقة وبالتالي نجد أن $m_0 = m_{1/2} = 150 \text{ GeV}$. كما يُحدد مجال قيم كل من $\tan\beta$ و A_0 عن طريق تشغيل ال SPheno دون أن ينتج لدينا أي خطأ. تحدث الأخطاء لسببين رئيسيين: (i) خارج مجال قيم $\tan\beta$ و A_0 ، تصبح قيم ثوابت الاقتران المعيارية (Gauge Coupling) كبيرة عند مقياس M_{GUT} وذلك بسبب أن توابع بيتا تكون كبيرة. وبالتالي، ستفشل نظرية الاضطراب لأنها لم تعد توفر حلاً تقريبياً قابلاً للاستخدام في حساب العمليات الفيزيائية. (ii) الحصول على مربع كتلة سالب لجسيمات التناظر الفائق [43]. يبين الجدول (3) قيم معاملات الإدخال المستخدمة في هذه الدراسة.

الجدول (3): مجال قيم معاملات الإدخال المستخدمة في هذه الدراسة، مع العلم أن $A_0 = a_0 m_0$.

| المعامل | $m_0 \text{ (GeV)}$ | $m_{1/2} \text{ (GeV)}$ | a_0 | $\tan\beta$ | $\cos(\theta_{ij})$ |
|---------|---------------------|-------------------------|---------|-------------|---------------------|
| القيم | [250, 635] | [150, 350] | [-2, 4] | [5, 15] | [0.087, 0.710] |

انطلاقاً من المعادلات (4، 11، 13، 15)، يُمكن تقدير قيم عناصر كل من مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو Y_ν ومصفوفة كتلة نترينوات ماجورانا M_R وفقاً للحد الأعلى التجريبي الحالي لكتلة النيوترينو الخفيف، والمقدرة بأنها أصغر من 0.8 eV عند مقياس الطاقة المنخفضة [44]. في هذه الدراسة، نحدد قيمة كبيرة لعناصر المصفوفة Y_ν ، لذلك يجب التحقق من أن هذه القيم لا تزال ضمن نطاق نظرية الاضطراب. وبناءً عليه، يُحدّد القيد (الشرط) على القيم العظمى المسموح بها لمدخلات عناصر المصفوفة Y_ν كما يلي: $| (Y_\nu)_{ij} |^2 < 4\pi$ [3]. وبالتالي نجد أن $M_R \geq 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$ ، و $\cos(\theta_{ij}) \leq 0.71$ ، كما حيث اعتبرنا الحالة المتحللة لكتلة نترينو ماجورانا ($M_R = M_{R1} = M_{R2} = M_{R3}$)، كما أن شدة اقتران يوكاوا للنترينو $f = 1$. بالإضافة إلى اعتبار أن $\text{sign}(\mu) > 0$ لجميع الحسابات العددية.

كما أنه لدينا وفقاً للمعادلات (11، 13، 15) ثلاث سيناريوهات لمصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو Y_ν لدراسة انتهاك النكهة اللبتونية لتفككات البوزون Z . يبين الجدول (4) قيم المدخلات $|n_e|$ ، $|n_\mu|$ ، $|n_\tau|$ لكل سيناريو من السيناريوهات الثلاث. كما تُثبت قيمة مقياس طاقة نظرية التوحيد العظمى عند $M_{GUT} = 2.00 \times 10^{16} \text{ GeV}$ ، وكذلك تُثبت قيمة مقياس كسر التناظر الفائق عند $M_{SUSY} = 10^3 \text{ GeV}$ [45].

الجدول (4): سيناريوهات مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو المستخدمة في الحسابات العددية.

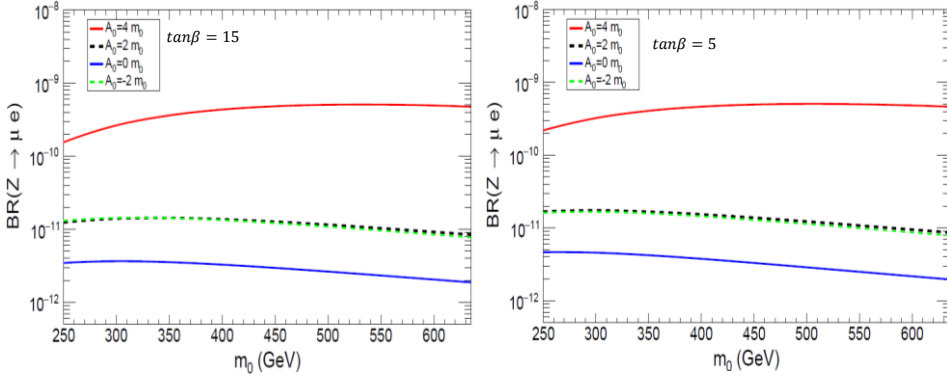
| السيناريو | $C_{\tau\mu}$ | $C_{\tau e}$ | $C_{\mu e}$ | $ n_e $ | $ n_\mu $ | $ n_\tau $ | المصفوفة |
|-----------|---------------|--------------|-------------|---------|-----------|------------|--|
| $\tau\mu$ | $C_{\tau\mu}$ | 0 | 0 | 0.1 | 1 | 1 | $y_\nu = f \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_{\tau\mu} \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - C_{\tau\mu}^2} \end{pmatrix}$ |
| τe | 0 | $C_{\tau e}$ | 0 | 1 | 0.1 | 1 | $y_\nu = f \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_{\tau e} \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - C_{\tau e}^2} \end{pmatrix}$ |
| μe | 0 | 0 | $C_{\mu e}$ | 1 | 1 | 0.1 | $y_\nu = f \begin{pmatrix} \sqrt{1 - C_{\mu e}^2} & C_{\mu e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ |

ستتم دراسة $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ مع (بدون) تطبيق القيود المفروضة من التفككات الإشعاعية $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ الغير مكتشفة تجريبياً.

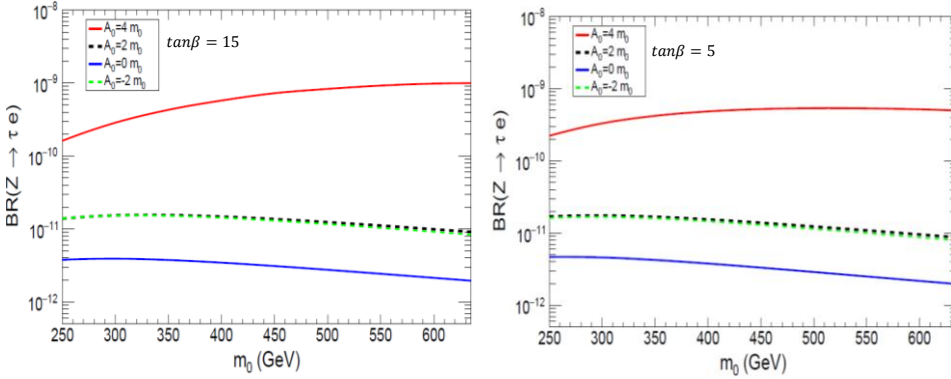
5-1- تغيرات نسبة التفرع $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بدون فرض قيود من التفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$:

سنعتبر في هذه الحالة أنّ تفككات انتهاك النكهة اللبتونية للبوزون Z غير مرتبطة بتفككات جسيمات أخرى، مثل التفككات الإشعاعية. تظهر الأشكال (3، 4، 5) تغيرات نسبة التفرع لانتهاك النكهة اللبتونية لتفكك البوزون Z $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بدلالة m_0 عند $\tan\beta = 5, 15$ ، و $A_0 = (0, \pm 2, 4)m_0$. أما بقية المعاملات فهي كالتالي: $f = 1$ ،

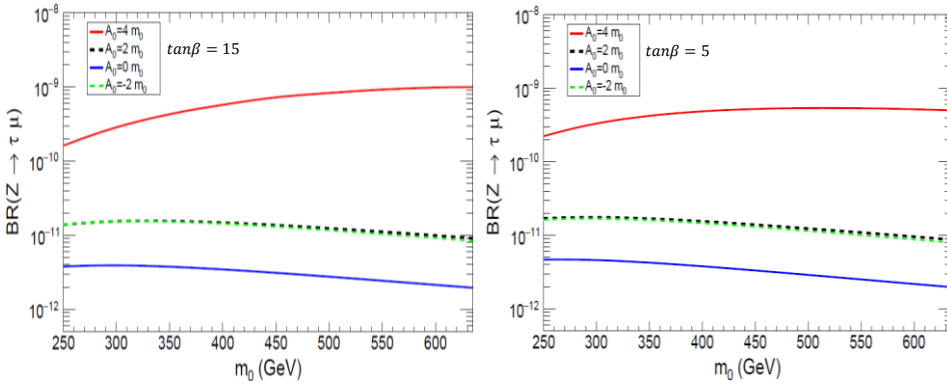
نلاحظ من $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$ و $\cos(\theta_{ij}) = 0.71$ ، $m_{1/2} = 150 \text{ GeV}$ الأشكال (3، 4، 5) أن قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ تتعلق بشكل كبير بقيمة ثابت الاقتران الثلاثي



الشكل - 3: تغيرات $BR(Z \rightarrow \mu e)$ بدلالة m_0 .



الشكل - 4: تغيرات $BR(Z \rightarrow \tau e)$ بدلالة m_0 .

الشكل - 5: تغيرات $BR(Z \rightarrow \tau\mu)$ بدلالة m_0 .

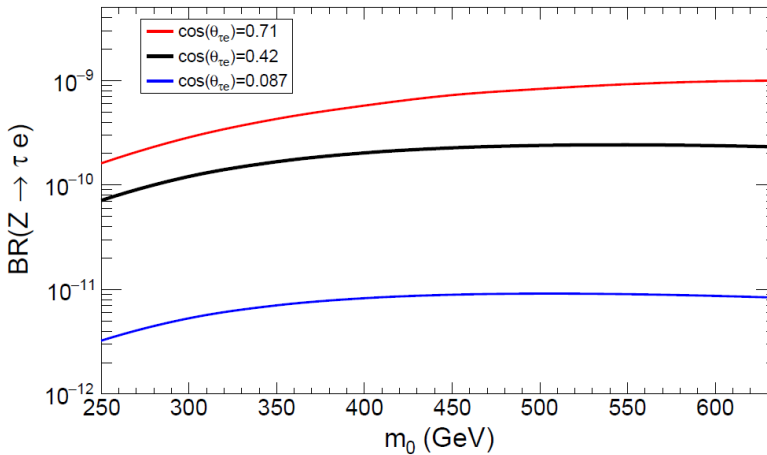
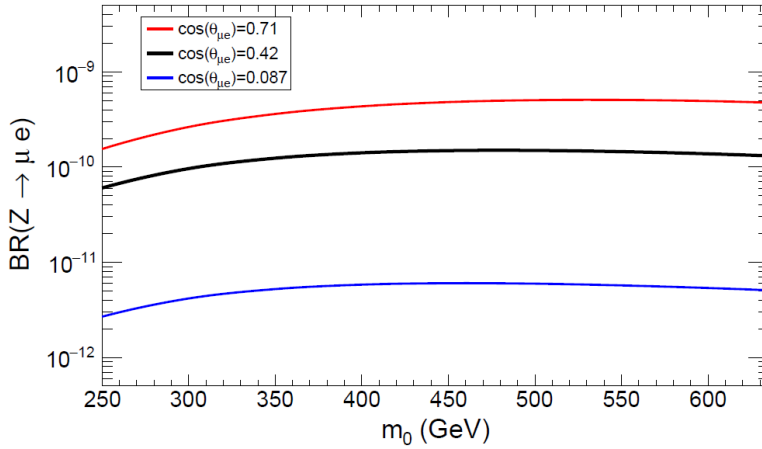
الخطي A_0 حيث تزداد قيم نسبة التفرع $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بشكل واضح بازدياد قيم A_0 وذلك عند قيمة معينة لـ m_0 . وهذا يعني أنّ زيادة شدة الاقتران بين الفرميونات فائقة التناظر وبوزون هيجز يزيد من قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ ، وبالتالي تكون أفضل قيم لـ $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ عند $A_0 = 4m_0$. كما نلاحظ أنّ قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ تكون متساوية عند $A_0 = \pm 2m_0$ ، وذلك لأن مساهمة ثابت الاقتران الثلاثي A_0 من معادلات إعادة التنظيم RGEs، يكون متناسب مع A_0^2 و A_0 على التوالي (المعادلات 5-a، 5-b).

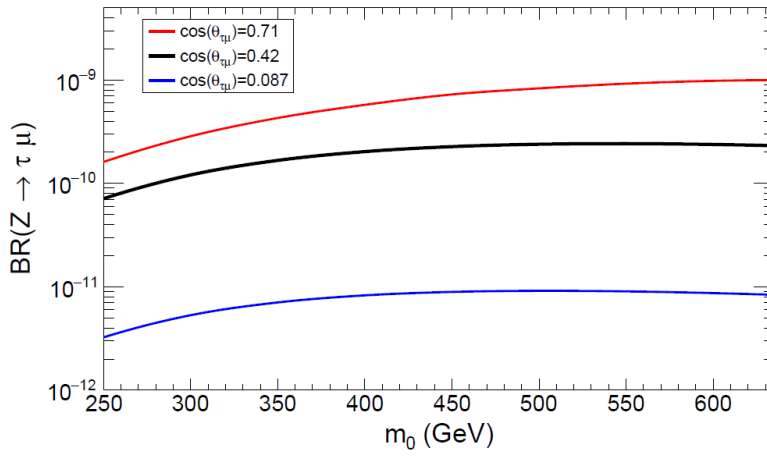
إضافة إلى ذلك، نلاحظ عند $\tan\beta = 5, 15$ ، و $A_0 = 0, \pm 2m_0$ وجود تغير بسيط جداً في قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ وذلك عندما تزداد قيم m_0 من 250 GeV إلى 635 GeV حيث تكون $BR(Z \rightarrow \tau\mu) = BR(Z \rightarrow \tau e) = BR(Z \rightarrow \mu e)$ بينما عند $\tan\beta = 15$ ، و $A_0 = 4m_0$ فإنّ $BR(Z \rightarrow \tau\mu) = BR(Z \rightarrow \tau e)$ ، حيث تزداد قيم نسبة التفرع لكل من القناتين من 1.6×10^{-10} حتى 1.0×10^{-9} . أما قيم $BR(Z \rightarrow \mu e)$ فإنها تكون ضمن المجال $[5 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-10}]$ بشكل تقريبي.

يظهر الشكل (6) تغيرات نسبة التفرع $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بدلالة m_0 عند ثلاث قيم مختلفة لـ $\cos\theta_{ij}$ وهي $\cos\theta_{ij} = 0.71, 0.42, 0.087$. مع أخذ الحالة $A_0 = 4m_0$ بعين الاعتبار، أما قيم بقية المعاملات فهي كما يلي: $f = 1$ ، $m_{1/2} = 150$ GeV، $\tan\beta =$

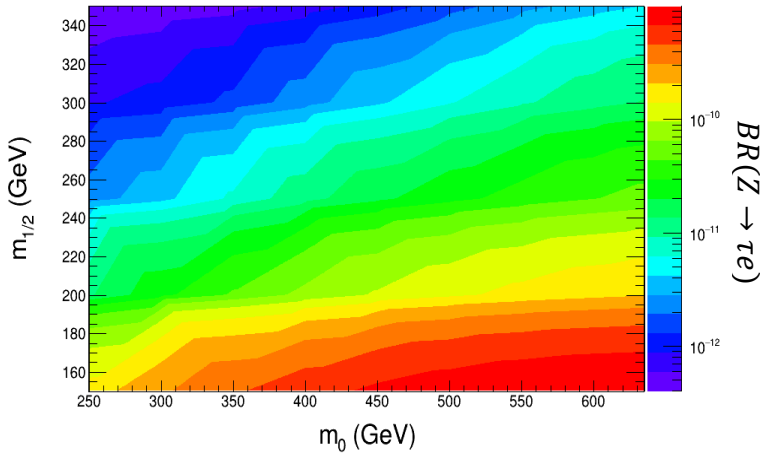
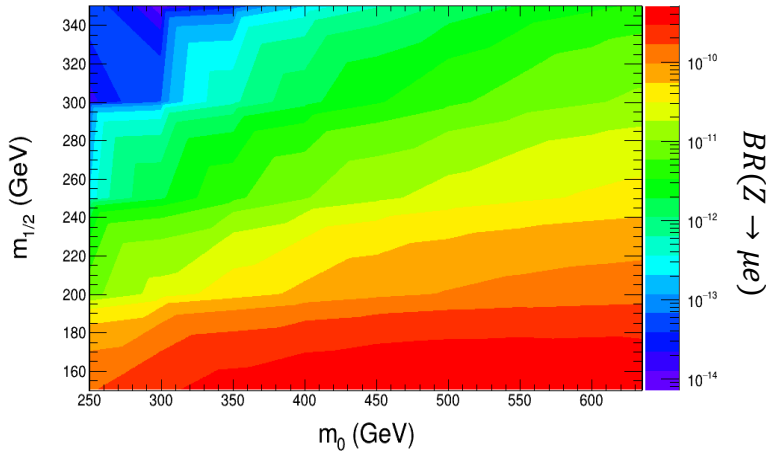
15، و $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$. نلاحظ من الشكل (6) أن قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ تزداد بوضوح مع ازدياد قيم $\cos(\theta_{ij})$ وذلك عند قيمة معينة لـ m_0 . يعود سبب ذلك إلى أن مساهمة الجداء $Y_\nu^t Y_\nu$ الموجود في معادلات RGEs تزداد مع ازدياد قيمة $\cos(\theta_{ij})$ ، حيث أن $(Y_\nu^t Y_\nu)_{ij} = f^2 \cos(\theta_{ij})$. بالإضافة إلى ذلك، تزداد كتلة النترينو الخفيف بازدياد قيمة الجداء $Y_\nu^t Y_\nu$ وفقاً للمعادلة (4). كما نلاحظ أن أعلى قيمة لنسبة التفرع $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ تتحقق عند $\cos(\theta_{ij}) = 0.71$ و $m_0 = 635 \text{ GeV}$ مع العلم أن $A_0 = 4m_0$. تبلغ القيم العددية لنسب التفرع في هذه الحالة القيم التالية:

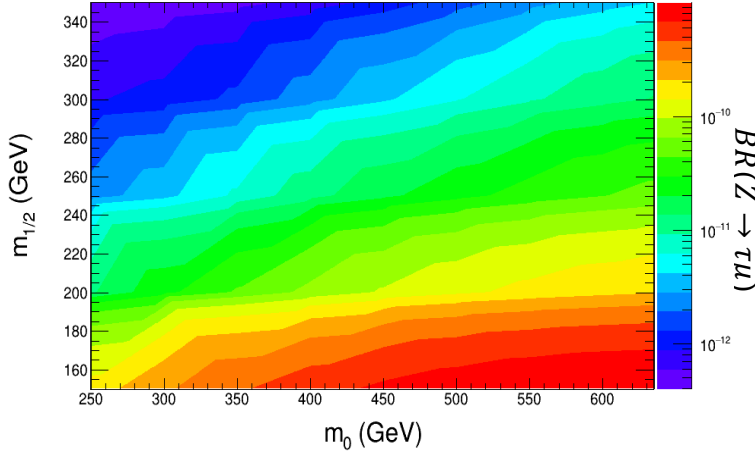
$$BR(Z \rightarrow \mu e) = 5 \times 10^{-10}, BR(Z \rightarrow \tau \mu) = BR(Z \rightarrow \tau e) = 1.0 \times 10^{-9}$$





الشكل - 6: تغيرات نسبة التفرع $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بدلالة m_0 عند $A_0 = 4m_0$ و $\tan\beta = 15$.





الشكل - 7: المخطط الكنتوري لتغيرات $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ في فضاء المعاملين m_0 و $m_{1/2}$.

كما تكون $BR(Z \rightarrow \tau\mu) = BR(Z \rightarrow \tau e) \approx BR(Z \rightarrow \mu e)$ عند كل من $\cos(\theta_{ij}) = 0.42$ و $\cos(\theta_{ij}) = 0.087$ وذلك عندما تتغير قيم m_0 من 250 GeV إلى 635 GeV .

يظهر الشكل (7) تغيرات $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ كمخطط كنتوري في فضاء المعاملين m_0 ، $m_{1/2}$ ، حيث تم تثبيت قيم المعاملات الأخرى كما يلي: $A_0 = 4m_0$ ، $f = 1$ ، $\tan\beta = 15$ ، $\cos(\theta_{ij}) = 0.71$ و $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$. نلاحظ تناقص قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ مع ازدياد قيم $m_{1/2}$ من 150 GeV إلى 350 GeV عند أي قيمة ثابتة لـ m_0 . على العكس، تزداد قيم $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ مع ازدياد قيم m_0 من 250 GeV إلى 635 GeV عند أي قيمة ثابتة لـ $m_{1/2}$. كما تكون أفضل قيم لـ $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ في المنطقة ذات اللون الأحمر حيث أن $m_0 \in [320, 635] \text{ GeV}$ و $m_{1/2} \in [150, 175] \text{ GeV}$ بالنسبة للقناة $(Z \rightarrow \mu e)$. أما بالنسبة للقناتين $(Z \rightarrow \tau\mu)$ و $(Z \rightarrow \tau e)$ فإن $m_0 \in [440, 635] \text{ GeV}$ و $m_{1/2} \in [150, 175] \text{ GeV}$ تقريباً.

5-3- دراسة نسبة التفرع $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ عند فرض قيود من التفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$:

ندرس في هذا القسم تغيرات $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بعد تطبيق قيود $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$. لم يتم الكشف تجريبياً عن التفككات الإشعاعية التي تخترق النكهة اللبتونية $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ ،

وبالتالي فإنّ قيم BRs لهذه التفككات مقيدة بالحدود العليا التجريبية كما هو موضح في الجدول (5).

الجدول (5): الحدود العليا التجريبية للتفككات الإشعاعية لجسيمين $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ [46] [47].

| التفكك | الحد الأعلى | اسم التجربة |
|-----------------------------------|-----------------------|-------------|
| $BR(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ | 4.2×10^{-8} | Belle |
| $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$ | 5.6×10^{-8} | Belle |
| $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$ | 4.2×10^{-13} | MEG |

في التناظر الفائق، يمكن أن يكون مصدر عمليات LFV العناصر الغير قطرية في مصفوفة كتلة اللبتونات فائقة التناظر اليسرى (بحسب معادلات RGEs). لذلك، يمكن تقريب علاقة BRs للتفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ في نظرية إدخال الكتلة (Mass Insertion) بواسطة التقريب اللوغاريتمي، كما يلي [30][43]:

$$BR(l_i \rightarrow l_j \gamma) \propto \alpha^3 m_{l_i}^5 \frac{|\Delta m_{Lij}^2|^2}{\tilde{m}^8} \tan^2(\beta) \quad (22)$$

تمثل α ثابت الاقتران الكهروضعيف، m_{l_i} كتلة اللبتون i . كما تمثل \tilde{m} القيمة الوسطية لكل جسيمات التناظر الفائق الداخلة في الحلقات (Loops).

نلاحظ من المعادلتين (22، 5-a) أنّ $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ تتعلق بشكل رئيس بمقياس كتل جسيمات التناظر الفائق والعناصر غير القطرية لمصفوفة كتلة اللبتونات فائقة التناظر اليسارية. تخضع العناصر غير القطرية بشكل شبه كامل لاختيار قيم معاملات كسر التناظر الناعم الفائق (Soft SUSY Breaking) ضمن قطاع آلية التآرجح الثقيل. بالإضافة إلى ذلك، تتناسب $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ طردياً مع $\tan^2(\beta)$ وهذا يؤدي إلى قيم مرتفعة لنسب تفرع انتهاك النكهة اللبتونية. لذلك، تم تثبيت $A_0 = 0 \text{ GeV}$ (لاستبعاد مساهمة الاقترانات الخطية الثلاثية) و $\tan\beta = 5$ لجميع الحسابات العددية. كما تمّ تثبيت $m_{1/2} = 150 \text{ GeV}$ ، $m_0 = 270 \text{ GeV}$ من خلال مراعاة شروط حدود الكتلة لجسيمات التناظر الفائق كما هو موضح في الجدول (3).

نعتبر انتهاك النكهة اللبتونية في التفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ مُقيِّداً لقيمة ثابت شدة اقتران يوكاوا للترينو f ، بينما تكون قيم عناصر مصفوفة اقتران يوكاوا Y_ν كما هو موضح في الجدول (4). يظهر الشكل (8) مخططات فاينمان للجسيمات فائقة التناظر التي تساهم في حدوث انتهاك النكهة اللبتونية للتفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ في النموذج المدروس -MSSM-Seesaw-I.

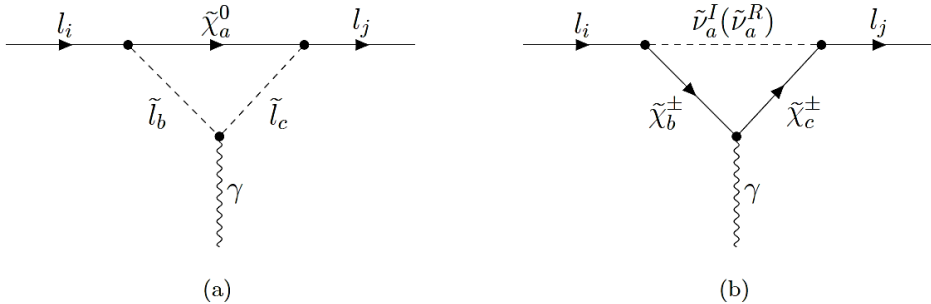
تكتب العلاقة الرياضية التحليلية لنسب التفرع للتفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ بالشكل الآتي [35]:

$$BR(l_i \rightarrow l_j \gamma) = \alpha \frac{m_{li}^5}{\Gamma_{li}} (|K_2^L|^2 + |K_2^R|^2) \quad (23)$$

يمثل Γ_{li} العرض الطاقى الكلي لتفكك اللبتون l_i . كما تمثل $K_2^{L,R}$ مجموع المعاملات المقابلة لكل مخطط من مخططات فاينمان الموضحة بالشكل (8). ومنه نكتب:

$$K_2^{L/R} = K_{2a}^{L/R} + K_{2b}^{L/R} \quad (24)$$

إن المعادلات الرياضيات للمعاملات $K_{2a}^{L/R}$ ، و $K_{2b}^{L/R}$ موضحة في المقالة الأولى المنشورة في المجلة البرازيلية للفيزياء.

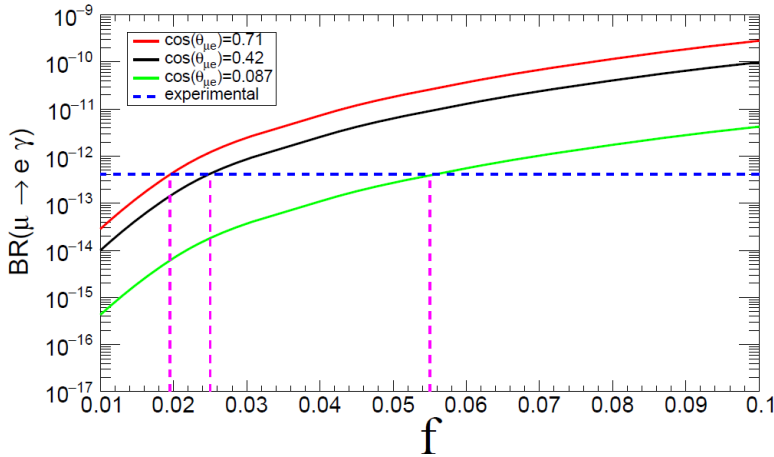


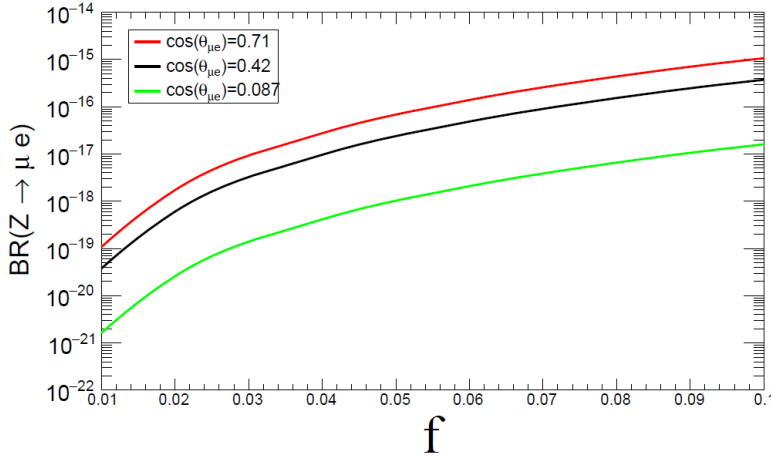
الشكل - 8: مخططات فاينمان ذات الحلقة الواحدة التي تساهم في $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ في النموذج -MSSM-Seesaw-I. (a) مساهمات حلقات اللبتونات فائقة التناظر-النتراينو. (b) مساهمات حلقات النترينوات فائقة التناظر-الشارجينو.

تظهر الأشكال (9-11) تغيرات كل من $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ ، و $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ بدلالة المعامل f عند $\cos(\theta_{ij}) = 0.71, 0.42, 0.087$. تم تثبيت قيم المعاملات الأخرى كما يلي: $\tan\beta = 5$ ، $m_0 = 270 \text{ GeV}$ ، $m_{1/2} = 150 \text{ GeV}$ ، $M_R = 5 \times$

10^{13} GeV ، و $A_0 = 0 \text{ GeV}$. يمثل الخط الأزرق المنقط الأفقي الحد التجريبي الحالي لـ $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ كما هو موضح في الجدول (6).

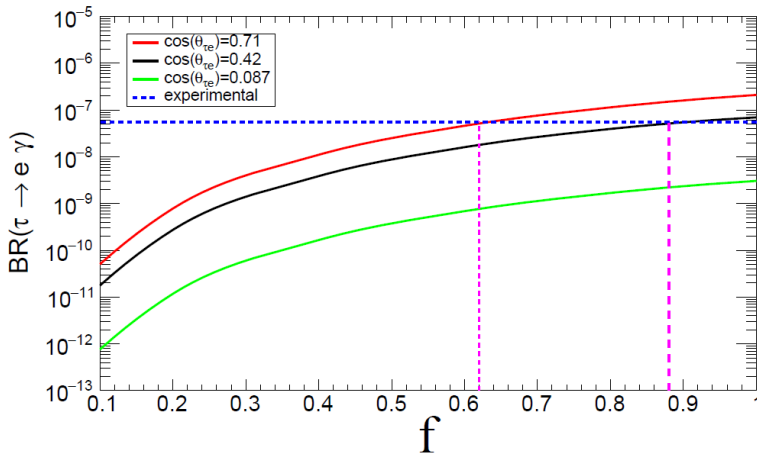
نبدأ المناقشة والحسابات العددية من تفككات الميون (μ) بسبب أن القيود التجريبية المفروضة عليها هي الأكثر صرامة من بين كل من الإلكترون (e) والتاو (τ). نلاحظ ازدياد قيم كلاً من $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$ و $BR(Z \rightarrow \mu e)$ مع ازدياد قيم المعامل f من 0.01 إلى 0.1، كما موضح بالشكل (9). كما يتجاوز التنبؤ بقيم $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$ الحد التجريبي الحالي عند $f = 0.0195, 0.025, 0.055$ للخط الأحمر، الأسود، والأخضر على التوالي. وهكذا فإن القيم العددية لـ $BR(Z \rightarrow \mu e)$ هي: 1.57×10^{-18} عند $\cos(\theta_{\mu e}) = 0.71$ ، 1.47×10^{-18} عند $\cos(\theta_{\mu e}) = 0.42$ ، 1.53×10^{-18} عند $\cos(\theta_{\mu e}) = 0.087$. ومنه فإن $BR(Z \rightarrow \mu e) \approx 1.5 \times 10^{-18}$ عند فرض قيود تفكك $(\mu \rightarrow e \gamma)$.

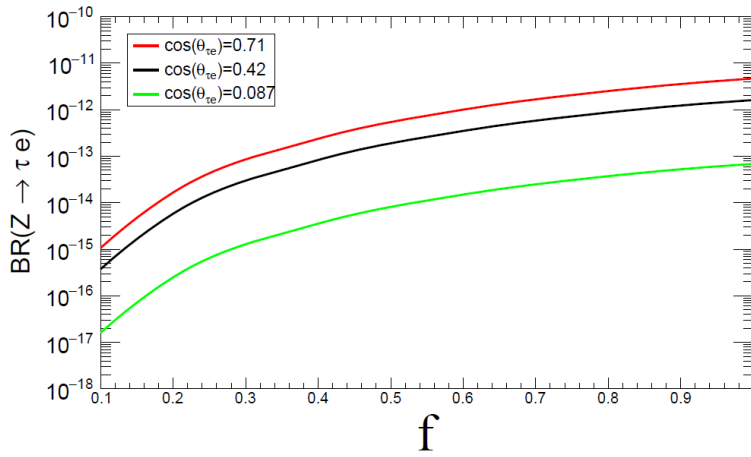




الشكل - 9: تغيرات كل من $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$ ، $BR(Z \rightarrow \mu e)$ بدلالة f .

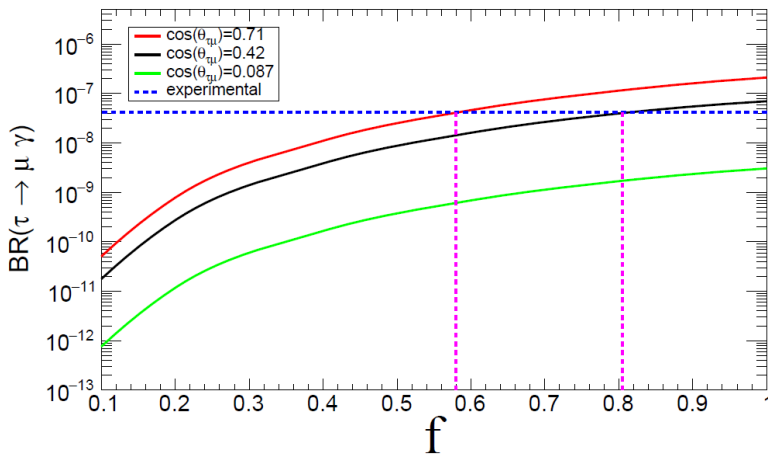
نلاحظ من الشكل (10) تزايد قيم $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$ و $BR(Z \rightarrow \tau e)$ مع ازدياد قيم المعامل f من 0.1 إلى 1. يتجاوز التنبؤ بقيم $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$ الحد التجريبي الحالي عند $f = 0.62, 0.88, 1$ للخط الأحمر، الأسود، والأخضر على التوالي. تبلغ في هذه الحالة القيم العددية لـ $BR(Z \rightarrow \tau e)$: 1.12×10^{-12} عند $\cos(\theta_{\tau e}) = 0.71$ ، 1.15×10^{-12} عند $\cos(\theta_{\tau e}) = 0.42$ ، 6.88×10^{-14} عند $\cos(\theta_{\tau e}) = 0.087$. ومنه فإن أفضل قيمة لـ $BR(Z \rightarrow \tau e)$ هي $BR(Z \rightarrow \tau e) \approx 1.13 \times 10^{-12}$ وذلك عند فرض قيود تفكك $(\tau \rightarrow e \gamma)$.

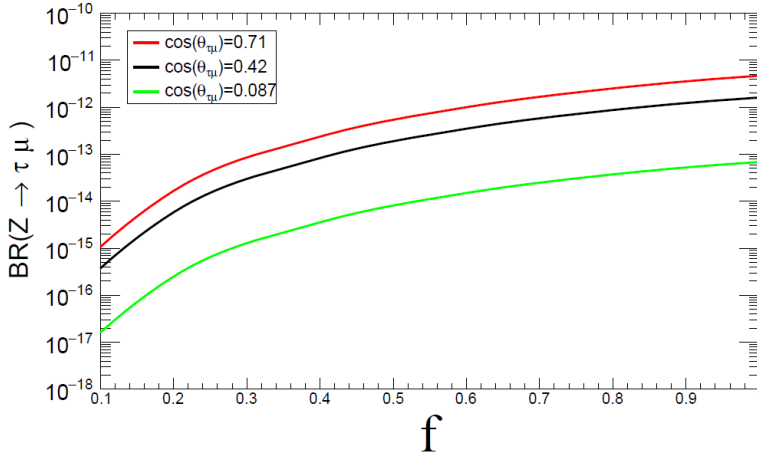




الشكل - 10: تغيرات كل من $BR(Z \rightarrow \tau e)$ ، $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$ بدلالة f .

نلاحظ من الشكل (11) تزايد قيم $BR(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ و $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$ مع ازدياد قيم المعامل f من 0.1 إلى 1. يتجاوز التنبؤ بقيم $BR(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ الحد التجريبي الحالي عند $f = 0.58, 0.805, 1$ للخط الأحمر، الأسود، والأخضر على التوالي. تبلغ في هذه الحالة القيم العددية لـ $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$: 8.97×10^{-13} عند $\cos(\theta_{\tau \mu}) = 0.71$ ، 8.91×10^{-13} عند $\cos(\theta_{\tau \mu}) = 0.42$ ، 6.88×10^{-14} عند $\cos(\theta_{\tau \mu}) = 0.087$. ومنه فإن أفضل قيمة لـ $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$ هي $BR(Z \rightarrow \tau \mu) \approx 8.94 \times 10^{-13}$ وذلك عند فرض قيود تفكك $(\tau \rightarrow \mu \gamma)$.





الشكل - 11: تغيرات كل من $BR(Z \rightarrow \tau\mu)$ ، $BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)$ بدلالة f .

7- النتائج:

تمت في هذه المقالة دراسة انتهاك النكهة اللبتونية (LFV) في تفككات البوزون Z ضمن النموذج القياسي فائق التناظر الأصغري المقيد (CMSSM) والمدد بآلية التآرجح من النوع الأول فائقة التناظر (SUSY Type-I). يمكن تحقيق آلية التآرجح من النوع الأول بإضافة حقل نترينو فائق التناظر، مما يولد كتلة للنترينو الخفيف. في البداية تمت دراسة العلاقات الرياضية التحليلية لنسب التفرع (BRs) لكل من تفككات انتهاك النكهة اللبتونية للبوزون Z ($BR(Z \rightarrow l_i l_j)$) وللتفككات الإشعاعية ($l_i \rightarrow l_j \gamma$). ثم تمت الدراسة العددية لنسب التفرع ($BR(Z \rightarrow l_i l_j)$) ضمن هذا النموذج بعد تطبيق القيود التالية: الحد الأعلى لكتلة النترينو الخفيف هو 0.8 eV ، انحفاظ الزوجية-R، إن أخف جسيم فائق التناظر في النموذج المدروس هو النترالينو. بالإضافة إلى ذلك، يجب أن تكون كتل الجسيمات فائقة التناظر (الشارجينو، اللبتونات، النترينوات، والنترالينو) أعلى من الحدود الدنيا التجريبية الموضوعة من قبل التجارب الحديثة. بالإضافة إلى ذلك، تم تطبيق القيود التجريبية للتفككات ($l_i \rightarrow l_j \gamma$) وفرض حدود نظرية الاضطراب على قيم معاملات النموذج المدروس. من أجل الحصول على كتلة صغيرة للنترينو الخفيف فإنه يجب أن تكون قيمة $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$. يُظهر الجدول (6) القيم العظمى لنسب تفرع انتهاك النكهة اللبتونية في تفكك البوزون Z .

الجدول (6): الحدود العليا لتفككات Z LFV. تشير النتائج العددية-1 (النتائج العددية-2) إلى النتائج بدون تقييد (مع تقييد) الشروط من التفككات $l_i \rightarrow l_j \gamma$.

| FCC- ee/CEPC | LHC (95% CL) | النتائج العددية-2 | النتائج العددية-1 | تفككات Z LFV |
|----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------------|
| 10^{-9} | 7.00×10^{-6} | 1.13×10^{-12} | 1.00×10^{-9} | $BR(Z \rightarrow \tau e)$ |
| 10^{-9} | 7.20×10^{-6} | 8.94×10^{-12} | 1.00×10^{-9} | $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$ |
| $10^{-8} - 10^{-10}$ | 2.62×10^{-7} | 1.50×10^{-18} | 5.00×10^{-10} | $BR(Z \rightarrow \mu e)$ |

تقع هذه القيم خارج الحدود العليا التجريبية لمصادم الهادرونات الكبير (LHC)، في حين أنها تتوافق مع حساسية المصادمات المستقبلية (FCC-ee/CEPC) في حالة عدم تطبيق قيود التفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ كما هو موضح في الجدول (6). بعد تطبيق قيود التفككات $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ ، فإن النتائج المذكورة أعلاه تُظهر قمعاً إضافياً يبلغ حوالي 10^{-3} لـ $BR(Z \rightarrow \tau l)$ و $BR(Z \rightarrow \mu e)$ عند مقارنتها بحساسية المصادمات المستقبلية (FCC-ee/CEPC). وبالتالي فإن التنبؤات العددية لنسب التفرع هي أقل بعدة مراتب من الحدود التجريبية في الوقت الحالي.

8- المراجع:

- [1] ATLAS Collaboration, "Search for Lepton-Flavor Violation in Z-Boson Decays with τ Leptons with the ATLAS Detector," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, no. 27, p. 271801, Dec. 2021, doi: 10.1103/PhysRevLett.127.271801.
- [2] M. Ardu and G. Pezzullo, "Introduction to Charged Lepton Flavor Violation," *Universe*, vol. 8, no. 6, p. 299, May 2022, doi: 10.3390/universe8060299.
- [3] V. De Romeri, M. J. Herrero, X. Marcano, and F. Scarcella, "Lepton flavor violating Z decays: A promising window to low scale seesaw neutrinos," *Physical Review D*, vol. 95, no. 7, p. 075028, Apr. 2017, doi: 10.1103/PhysRevD.95.075028.
- [4] P. Minkowski, " $\mu \rightarrow e \gamma$ at a rate of one out of 109 muon decays?," *Physics Letters B*, vol. 67, no. 4, pp. 421–428, Apr. 1977, doi: 10.1016/0370-2693(77)90435-X.
- [5] R. N. Mohapatra and G. Senjanović, "Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation," *Phys Rev Lett*, vol. 44, no. 14, pp. 912–915, Apr. 1980, doi: 10.1103/PhysRevLett.44.912.

- [6] J. Schechter and J. W. F. Valle, "Neutrino masses in $SU(2) \otimes U(1)$ theories," *Physical Review D*, vol. 22, no. 9, pp. 2227–2235, Nov. 1980, doi: 10.1103/PhysRevD.22.2227.
- [7] J. Schechter and J. W. F. Valle, "Neutrino decay and spontaneous violation of lepton number," *Physical Review D*, vol. 25, no. 3, pp. 774–783, Feb. 1982, doi: 10.1103/PhysRevD.25.774.
- [8] ATLAS Collaboration, "Search for the lepton flavor violating decay $Z\mu\mu$ in pp collisions at $\sqrt{s}=8$ TeV with the ATLAS detector," *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 7, p. 72010, Oct. 2014, doi: 10.1103/PhysRevD.90.072010.
- [9] K.-S. Sun, J.-B. Chen, X.-Y. Yang, and S.-K. Cui, "The LFV decays of Z boson in Minimal R-symmetric Supersymmetric Standard Model," *Chinese Physics C*, vol. 43, no. 4, p. 043101, Apr. 2019, doi: 10.1088/1674-1137/43/4/043101.
- [10] D. Jurčiukonis and L. Lavoura, "Two-body lepton-flavour-violating decays in a 2HDM with soft family-lepton-number breaking," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 3, p. 106, Mar. 2022, doi: 10.1007/JHEP03(2022)106.
- [11] K.-S. Sun, W.-H. Zhang, J.-B. Chen, H.-B. Zhang, and Q. Yan, "Lepton flavor violating decays of vector mesons in the MRSSM*," *Chinese Physics C*, vol. 47, no. 7, p. 073106, Jul. 2023, doi: 10.1088/1674-1137/acd3da.
- [12] A. Abada, A. J. R. Figueiredo, J. C. Romão, and A. M. Teixeira, "Probing the supersymmetric type III seesaw: LFV at low-energies and at the LHC," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 8, p. 99, Aug. 2011, doi: 10.1007/JHEP08(2011)099.
- [13] W. Altmannshofer, C. Caillol, M. Dam, S. Xella, and Y. Zhang, "Charged Lepton Flavour Violation in Heavy Particle DEcays," May 2022.
- [14] A. Collaboration, "Search for the charged-lepton-flavor-violating decay $Z\mu\mu$ in pp collisions at $\sqrt{s}=13$ TeV with the ATLAS detector," *Phys. Rev. D*, vol. 108, no. 3, p. 32015, Aug. 2023, doi: 10.1103/PhysRevD.108.032015.
- [15] R. S. Hundi, "Lepton flavor violating Z and Higgs decays in the scotogenic model," *The European Physical Journal C*, vol. 82, no. 6, p. 505, Jun. 2022, doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10453-3.
- [16] L. Calibbi, X. Marcano, and J. Roy, "Z lepton flavour violation as a probe for new physics at future e^+e^- colliders," *The European Physical Journal C*, vol. 81, no. 12, p. 1054, Dec. 2021, doi: 10.1140/epjc/s10052-021-09777-3.
- [17] J. Cao, Z. Xiong, and J. M. Yang, "Lepton flavor violating Z-decays in supersymmetric seesaw model," *The European Physical Journal C*, vol. 32, no. 2, pp. 245–252, Jan. 2004, doi: 10.1140/epjc/s2003-01391-1.

- [18] J. I. Illana and M. Masip, "Lepton Flavor Violation in Z and Lepton Decays in Supersymmetric Models," *Physical Review D*, vol. 67, no. 3, p. 035004, Feb. 2003, doi: 10.1103/PhysRevD.67.035004.
- [19] X.-X. Dong, S.-M. Zhao, X.-J. Zhan, Z.-J. Yang, H.-B. Zhang, and T.-F. Feng, " $Z \rightarrow l\bar{l}\bar{j}$ processes in the BLMSSM," *Chinese Physics C*, vol. 41, no. 7, p. 073103, Jul. 2017, doi: 10.1088/1674-1137/41/7/073103.
- [20] A. Méndez and L. M. Mir, "Analysis of the decay $Z \rightarrow e^+ \mu^-$ in supersymmetric theories," *Physical Review D*, vol. 40, no. 1, pp. 251–254, Jul. 1989, doi: 10.1103/PhysRevD.40.251.
- [21] I. CORTÉS-MALDONADO, A. MOYOTL, and G. TAVARES-VELASCO, "Lepton flavor violating decay $Z \rightarrow l_i l_j$ in the 331 model," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 26, no. 24, pp. 4171–4185, Sep. 2011, doi: 10.1142/S0217751X11054474.
- [22] Y.-T. Wang *et al.*, "Z boson decays $Z \rightarrow l\bar{l}j\bar{j}$ and Higgs boson decays $h \rightarrow l\bar{l}j\bar{j}$ with lepton flavor violation in a U(1) extension of the MSSM," *Physical Review D*, vol. 106, no. 5, p. 055044, Sep. 2022, doi: 10.1103/PhysRevD.106.055044.
- [23] A. Vicente, "Lepton Flavor Violation beyond the MSSM," *Advances in High Energy Physics*, vol. 2015, pp. 1–22, 2015, doi: 10.1155/2015/686572.
- [24] C. Weiß, "Lepton Flavor Violation in Supersymmetric Seesaw III Models," Thesis (Diploma), Institute of Theoretical Physics and Astrophysics - Julius Maximilian University of Würzburg, 2012. Accessed: Apr. 13, 2025. [Online]. Available: <https://www.physik.uni-wuerzburg.de/en/tp2/research/publications/diploma-theses/>
- [25] M. Hirsch, F. R. Joaquim, and A. Vicente, "Constrained SUSY seesaws with a 125 GeV Higgs," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 11, p. 105, Nov. 2012, doi: 10.1007/JHEP11(2012)105.
- [26] M. Hirsch, L. Reichert, and W. Porod, "Supersymmetric mass spectra and the seesaw scale," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 5, p. 86, May 2011, doi: 10.1007/JHEP05(2011)086.
- [27] S. S. AbdusSalam *et al.*, "Benchmark models, planes, lines and points for future SUSY searches at the LHC," *The European Physical Journal C*, vol. 71, no. 12, p. 1835, Dec. 2011, doi: 10.1140/epjc/s10052-011-1835-7.
- [28] M. E. Gómez, S. Heinemeyer, and M. Rehman, "Lepton Flavor Violating Higgs Boson Decays in Supersymmetric High Scale Seesaw Models," *Journal of Particle Physics*, vol. 1, no. 1, Jul. 2017, doi: 10.22606/jpp.2017.11003.
- [29] J. N. Esteves, M. Hirsch, W. Porod, J. C. Romao, J. W. F. Valle, and A. V. del Moral, "Flavour violation at the LHC: type-I versus type-II seesaw in minimal

- supergravity," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 05, pp. 003–003, May 2009, doi: 10.1088/1126-6708/2009/05/003.
- [30] M. Hirsch, W. Porod, Ch. Weiß, and F. Staub, "Supersymmetric type-III seesaw mechanism: Lepton flavor violation and LHC phenomenology," *Physical Review D*, vol. 87, no. 1, p. 013010, Jan. 2013, doi: 10.1103/PhysRevD.87.013010.
- [31] C. Arbeláez, M. Hirsch, and L. Reichert, "Supersymmetric mass spectra and the seesaw type-I scale," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 2, p. 112, Feb. 2012, doi: 10.1007/JHEP02(2012)112.
- [32] L. Calibbi, D. Chowdhury, A. Masiero, K. M. Patel, and S. K. Vempati, "Status of supersymmetric type-I seesaw in SO(10) inspired models," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 11, p. 40, Nov. 2012, doi: 10.1007/JHEP11(2012)040.
- [33] X. Marcano, *Lepton Flavor Violation from Low Scale Seesaw Neutrinos with Masses Reachable at the LHC*, 1st ed. Cham: Springer International Publishing, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-94604-7.
- [34] J. Yang, "Lepton flavor violating Z-boson decays at GigaZ as a probe of supersymmetry," *Sci China Phys Mech Astron*, vol. 53, no. 11, pp. 1949–1952, Nov. 2010, doi: 10.1007/s11433-010-4146-3.
- [35] W. Porod, F. Staub, and A. Vicente, "A flavor kit for BSM models," *The European Physical Journal C*, vol. 74, no. 8, p. 2992, Aug. 2014, doi: 10.1140/epjc/s10052-014-2992-2.
- [36] X.-J. Bi, Y.-B. Dei, and X.-Y. Qi, "Lepton flavor violation in supersymmetric SO(10) grand unified models," *Physical Review D*, vol. 63, no. 9, p. 096008, Apr. 2001, doi: 10.1103/PhysRevD.63.096008.
- [37] S. Navas et al. (Particle Data Group), "Review of Particle Physics," *Physical Review D*, vol. 110, no. 3, p. 030001, Aug. 2024, doi: 10.1103/PhysRevD.110.030001.
- [38] V. Hajahmad and M. Alsayed Ali, "Lepton Flavor Violation of Z Gauge Boson Decays in Supersymmetric Type-III Seesaw Model," *Brazilian Journal of Physics*, vol. 55, no. 5, p. 200, Oct. 2025, doi: 10.1007/s13538-025-01830-w.
- [39] F. Staub, "From superpotential to model files for FeynArts and CalcHep/CompHep," *Comput Phys Commun*, vol. 181, no. 6, pp. 1077–1086, Jun. 2010, doi: 10.1016/j.cpc.2010.01.011.
- [40] F. Staub, "SARAH 4: A tool for (not only SUSY) model builders," *Comput Phys Commun*, vol. 185, no. 6, pp. 1773–1790, Jun. 2014, doi: 10.1016/j.cpc.2014.02.018.
- [41] M. D. Goodsell, K. Nickel, and F. Staub, "Two-loop Higgs mass calculations in supersymmetric models beyond the MSSM with SARAH and SPheno," *The*

- European Physical Journal C*, vol. 75, no. 1, p. 32, Jan. 2015, doi: 10.1140/epjc/s10052-014-3247-y.
- [42] J. Bernigaud, A. K. Forster, B. Herrmann, S. F. King, W. Porod, and S. J. Rowley, "Data-driven analysis of a SUSY GUT of flavour," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 5, p. 156, May 2022, doi: 10.1007/JHEP05(2022)156.
- [43] J. N. Esteves, J. C. Romao, M. Hirsch, F. Staub, and W. Porod, "Supersymmetric type-III seesaw mechanism: Lepton flavor violating decays and dark matter," *Physical Review D*, vol. 83, no. 1, p. 013003, Jan. 2011, doi: 10.1103/PhysRevD.83.013003.
- [44] KATRIN Collaboration, "Direct neutrino-mass measurement with sub-electron-volt sensitivity," *Nat Phys*, vol. 18, no. 2, pp. 160–166, Feb. 2022, doi: 10.1038/s41567-021-01463-1.
- [45] M. Hirsch, S. Kaneko, and W. Porod, "Supersymmetric type-II seesaw mechanism: CERN LHC and lepton flavor violating phenomenology," *Physical Review D*, vol. 78, no. 9, p. 093004, Nov. 2008, doi: 10.1103/PhysRevD.78.093004.
- [46] BELLE Collaboration, "Search for lepton-flavor-violating tau-lepton decays to $\ell\gamma$ at Belle," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 10, p. 19, Oct. 2021, doi: 10.1007/JHEP10(2021)019.
- [47] A. M. Baldini *et al.*, "Search for the Lepton Flavour Violating Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ with the Full Dataset of the MEG Experiment," *The European Physical Journal C*, vol. 76, no. 8, p. 434, Aug. 2016, doi: 10.1140/epjc/s10052-016-4271-x.