

## انتهاك النكهة اللبنانيّة في تفكك البوzon القياسي $Z$ وفق النموذج المتأرجح فائق التناظر من النوع الأول

مرهف السيد علي، د.وائل حاج أحمد

قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة إدلب

### الملخص:

تبحث هذه الدراسة عن انتهاك النكهة اللبنانيّة (LFV) لتفكك البوzon  $Z$  إلى لبتونين مشحونين من نكهتين مختلفتين:  $Z \rightarrow l_i l_j$ ،  $Z \rightarrow \tau e$ ،  $Z \rightarrow \mu e$  و  $Z \rightarrow \gamma$ . تم هذا العمل في إطار النموذج القياسي الفائق التناظر الأصغرى المقيد (CMSSM) والممدد بالآلية التأرجح الفائقة التناظر من النوع الأول (SUSY Seesaw Type-I). حسبنا نسب التفرع لانتهاك النكهة اللبنانيّة لتفككات البوzon  $Z$  بعد الأخذ بعين الاعتبار القيود المفروضة من الحدود التجريبية الحالية لكتل النيوتروينو والجسيمات فائقة التناظر. وُجد أن النتائج العددية هي  $10^{-9} \times 1$  لكتل النيوتروينو  $\mu$  من القناتين  $\tau e$  و  $10^{-10} \times 5$  لكتلة  $\mu e$ . بعد تطبيق القيود من الحدود التجريبية على التفككات الإشعاعية ( $l_i \rightarrow l_j \gamma$ )، تحصل نسب التفرع لتفككات LFV للبوzon  $Z$  على قيم إضافي قدره  $10^{-3}$  لكتل النيوتروينو  $\mu$  و  $10^{-8}$  لكتلة  $\mu e$ . توقعاتنا لنسب التفرع أقل بعده مراتب من الحدود التجريبية الحالية.

**الكلمات المفتاحية:** انتهاك النكهة اللبنانيّة، النموذج MSSM، آلية التأرجح من النوع الأول.

# Lepton Flavor Violation of Z Gauge Boson Decays in Supersymmetric Type-I Seesaw Model

Murhaf Alsayed Ali and Vael Hajahmad

Physics Department, Idlib University, Syria.

## – Abstract:

In this study, we investigate the lepton flavor violation (LFV) of Z gauge boson decaying into two different flavor charged leptons  $Z \rightarrow l_i l_j$  ( $Z \rightarrow \tau\mu$ ,  $Z \rightarrow \tau e$  and  $Z \rightarrow \mu e$ ). This work is performed in the framework of the constrained minimal supersymmetric standard model (CMSSM) which is extended by the type-I seesaw mechanism. By considering constraints from the current experimental bounds on neutrino and supersymmetric particle masses, we calculate the branching ratios of the LFV of Z boson decays. The numerical results are found to be  $1 \times 10^{-9}$  for both the  $\tau\mu$  and  $\tau e$  decay channels and  $5 \times 10^{-10}$  for the  $\mu e$  channel. After applying the constraints from the experimental bounds on the radiative two body decays ( $l_i \rightarrow l_j \gamma$ ), the branching ratios of the LFV of Z boson decays get an additional suppression of  $10^{-3}$  for the  $\tau\mu$  and  $\tau e$  decay channels and  $10^{-8}$  for the  $\mu e$  channel. Our prediction of the branching ratios is several orders of magnitude below the current experimental bounds.

**Keywords:** Lepton Flavor Violation, MSSM Model, Type-I Seesaw Mechanism.

1 - المقدمة

يوجد ثلاثة أجيال (نكهات Flavors) للبتونات في النموذج القياسي (Standard Model) لفيزياء الجسيمات. كما يكون كل من العدد البتوني والنكة البتونية لكل جيل محفوظين في تفاعلات البتونات، حيث تكون النترنوات عديمة الكتلة. ومع ذلك، لا يمكن اعتبار هذا الانفراط مبدأً مسلماً به في النموذج القياسي، إذ تشير تجارب اهتزاز النترينو إلى أنَّ التفاعلات التي تنتهي هذا الانفراط تحدث في الطبيعة [1][2]. أظهرت تجارب اهتزاز النترينو بأن جسيمات النترينو لديها كتلة صغيرة، وبالتالي فإن انتهاك النكة البتونية (Lepton Flavor Violation-LFV) يمكن أن يحدث في قطاع النترينو. وهذا يعتبر في الوقت الحالي الدليل التجاري الأكثَرَ وضوحاً على أن النموذج القياسي غير كاف لشرح البيانات ويحتاج إلى تمديد باستعمال آليات جديدة [3]. إن أكثر الأفكار شيوعاً لتوليد انتهاك النترينو هي آلية التأرجح (Seesaw Mechanism). يمكن تصنيف آلية التأرجح إلى ثلاثة أنواع رئيسية: النوع الأول (Seesaw Type-I)، النوع الثاني (Seesaw Type-II)، والنوع الثالث (Seesaw Type-III). يقدم النموذج الأول والثالث ثلث فرميونات في الحالة الأحادية (ثلاثية) [4][5]، بينما يقدم النموذج الثاني ثلاثة سلمية (Triplet Scalar) [6] . [7]

تُعد دراسة تفاعلات انتهاك النكة البتونية من الأبحاث المتقدمة لاستكشاف الفيزياء الحديثة (فيزياء ما بعد النموذج القياسي Beyond SM) [8]. يوجد مجموعة من تفاعلات انتهاك النكة البتونية والتي تدرس وتشمل تفككتات كل من البتونات، البوzon، Z، بوزن هيجز، والبوزن  $\tilde{Z}$ ، وتفككتات هادرونات مختلفة [9][10]. لم يكشف تجريبياً حتى الآن عن أي تفاعل يظهر انتهاك النكة البتونية، حيث أنَّ الأبحاث التجريبية تزودنا فقط بالحدود العليا لمثل هذه التفاعلات [1][2].

يوجد العديد من النماذج الفيزيائية الجديدة والتي يمكن أن تزداد فيها نسب التفرع (Branching Ratios) لتفاعلات انتهاك النكة البتونية حتى تصبح ضمن مجال الكشف التجاري الحالية. من هذه النماذج: نماذج التوحيد الأعظمي (Grand Unified)，نموذج ثنائية بوزن هيجز (Higgs Boson Doublets)، نماذج التناظر الفائق (Super Symmetry) . [11]

تقدم نماذج التناظر الفائق حلًّا لمشكلة التسلسل الهرمي، ومشكلة وجود المادة المظلمة غير الباريونية (DM) في الكون. إذا وجد مصادم الهادرونات الكبير (Large Hadron Collider) إشارات عن التناظر الفائق، فسيكون من الجيد تضمين آلية التأرجح في إطار التناظر الفائق. ربما تشير هذه النماذج إلى إمكانية وجود انتهاءك النكهة اللبتونية في تفككت كل من البوزون  $Z$ ، وبوزون هيجز، وتفككات اللبتونين تاو وميون [12].

إن تنبؤات النموذج القياسي لانتهاك النكهة اللبتونية في تفككت البوزون  $Z$  الثلاث  $Z \rightarrow \tau\mu e$  و  $Z \rightarrow \tau e$  تكون غير ممكنة لعدمأخذ كتلة النترينو بعين الاعتبار. وبالتالي فإنه لا يمكن الكشف عنها من خلال التجارب الحالية في المصادر (LHC) (تجارب أطلس و CMS). عند الأخذ بعين الاعتبار كتل النترينو، فإن تنبؤات النموذج القياسي لهذه التفككتات تتراوح من  $10^{-50}$  إلى  $10^{-40}$ . لذا، فإن أي اكتشاف تجربى لتفككت  $Z$  LFV سيشير إلى وجود فيزياء جديدة [13]. يبين الجدول (1) الحدود العليا التجريبية لـ BRs لتفكك البوزون  $Z \rightarrow \tau e$ ،  $Z \rightarrow \tau\mu e$  و  $Z \rightarrow \mu e$  وفقاً للنتائج الحديثة لتجربة ATLAS [14][1] والحساسية المتوقعة للمصادمات المستقبلية FCC- [16][15] ee/CEPC.

الجدول (1): الحدود العليا التجريبية والحساسية المتوقعة لتفكك البوزون  $Z$ .

FCC-ee/CEPC	LHC (95% CL)	المصادم
$10^{-9}$	$7.00 \times 10^{-6}$	$BR(Z \rightarrow \tau e)$
$10^{-9}$	$7.20 \times 10^{-6}$	$BR(Z \rightarrow \tau\mu)$
$10^{-8} - 10^{-10}$	$2.62 \times 10^{-7}$	$BR(Z \rightarrow \mu e)$

سنركز في دراستنا على تفككت البوزون  $Z$  إلى نكمتين لبتونيتين مختلفتين ( $Z \rightarrow l_i l_j$  حيث أن  $\tau, e, \mu, \tau = l_i, l_j$ ). وسنقوم بإجراء تحليل للنتائج في إطار السيناريو المقيد للنموذج القياسي فائق التناظر الأصغرى (Constrained Minimal Supersymmetric) الذي يمدد بنموذج آلية التأرجح من النوع الأول (Standard Model MSSM-Seesaw). تُحفز امتزاجات (Mixings) اللبتونات فائقة التناظر في نماذج آلية التأرجح (Type-I).

فائقة التناظر تفاعلات انتهاك النكهة البتونية  $V_{\gamma\bar{l}_i l_j}$  حيث أن  $(V = Z, \gamma)$ . نتيجةً لذلك، فإنه يوجد ارتباط بين نسب التفرع BRs لتفككات البوzon  $Z$  وبين التفككات الإشعاعية  $(\gamma \rightarrow l_i l_j)$  [17][18][19]. سنأخذ بعين الاعتبار في هذه الدراسة الحدود التجريبية لكل من كتل الجسيمات الفائقة التناظر ونسب التفرع لتفككات الإشعاعية  $(\gamma \rightarrow l_i l_j)$  وذلك بهدف تقييد معاملات النموذج المدروس ومن ثم تقدير قيم نسب التفرع لتفكك البوzon  $Z$   $(Z \rightarrow l_i l_j)$ .

أجريت دراسات سابقة حول انتهاك النكهة البتونية في تفككات البوzon  $Z$  في النموذج MSSM باستخدام معاملات كسر التناظر الفائق العامة [18][20]. بالإضافة إلى دراسات أخرى في نماذج مختلفة، مثل النموذج الأصغرى (331)، نموذج سكتوجينيك (Scotogenic Model)، ونموذج التمديد (1)  $U(1)$  للنموذج MSSM. تتبأ هذه الدراسات بأنّ قيم كل من  $(\mu \rightarrow \tau \rightarrow Z, BR(Z \rightarrow \tau e))$  تتراوح من  $10^{-8}$  حتى  $10^{-16}$ ، بينما تتراوح قيم  $(\mu e \rightarrow Z, BR(Z \rightarrow \mu e))$  من  $10^{-13}$  حتى  $10^{-19}$  [15][21][22].

## 2- أهمية البحث وأهدافه:

قد تكون ملاحظة انتهاك النكهة البتونية إحدى أكثر العلامات وضوحاً على وجود الفيزياء الجديدة (فيزياء ما وراء النموذج القياسي). هذه التفاعلات يمكن أن تتحقق في حالة تفكك بوزون هيغز أو بوزون  $Z$  أو بوزونات أخرى إلى أزواج من البتونات بنكهات مختلفة.

تهدف هذه الدراسة إلى البحث عن فيزياء جديدة من خلال إيجاد أدلة على انتهاك النكهة البتونية في تفكك البوzon  $Z$  ضمن النموذج MSSM المقيد والممدد بآلية التأرجح من النوع الأول، إضافة إلى البحث عن تفككات نووية جديدة للبوzon  $Z$  في التفاعلات النووية الضعيفة.

## 3- النموذج MSSM-Seesaw Type-I:

في هذه الحالة ستضاف ثلاثة أجيال من حقول النتريلو الفائقة اليمنى الثقيلة  $\tilde{\nu}$  (نتريلوات ماجورانا) إلى طيف جسيمات النموذج MSSM. تمتلك الحقول المضافة الأعداد

الكومومية  $(1, 1, 0)$  تحت الزمرة المعيارية  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  للنموذج القياسي، وبالتالي تكون مفردة تحت الزمرة  $SU(2)_L$  [23] [17]. ومنه سيضاف حد جديد إلى معادلة الكمون الفائق (Superpotential) للنموذج MSSM. يكتب الكمون الفائق الكلي بالشكل التالي:

$$W = W_{MSSM} + W_{Seesaw-I} \quad (1)$$

تمثل  $W_{MSSM}$  الكمون الفائق للنموذج MSSM، أما  $W_{Seesaw-I}$  فتمثل الكمون الفائق للنموذج  $W_{Seesaw-I}$  آلية التأرجح من النوع الأول فائق التماز (SUSY Type-I Seesaw). يكتب بالشكل التالي:

$$W_{Seesaw-I} = \frac{1}{2} M_R \hat{\nu} \hat{\nu} + Y_\nu \hat{\nu} \hat{L} \hat{H}_u \quad (2)$$

إذ تمثل  $\hat{L}$  حقل اللبتونات اليسارية فائق التماز، وتمثل  $\hat{H}_u$  حقل هيجز العلوي فائق التماز. كما تمثل  $M_R$  مصفوفة كتلة النترینو اليميني الثقيل (نترینو ماجورانا)، وهي مصفوفة  $3 \times 3$ . أما  $Y_\nu$  فتمثل مصفوفة اقتران يوكاوا للنترینو، وهي مصفوفة  $3 \times 3$  وعقدية بشكل عام [17][24]. عند مقياس طاقة أدنى من مقياس أخف نترینو يميني  $\hat{\nu}$ ، فإنه يمكن دمج كل الحقول الثقيلة وبالتالي ينتج الكمون الفائق الفعال كما في المعادلة التالية:

$$W_{eff-I} = W_{MSSM} + \frac{1}{2} k_\nu \hat{L} \hat{L} \hat{H}_u \hat{H}_u \quad (3)$$

حيث أنّ:

يمثل الحد الثاني من المعادلة (3) مؤثر فاينبرغ والذي يزلاج في حالته فائقة التماز بين اثنين من الحقول اللبتونية اليسارية فائقة التماز مع اثنين من حقول هيجز العلوية فائقة التماز [24][25]. تنتج مصفوفة كتلة النترینو الخفيف بعد كسر التماز الكهروضعيف، كما في المعادلة التالية:

$$m_\nu = \frac{v_u^2}{2} k_\nu = -\frac{v_u^2}{2} Y_\nu^t (M_R)^{-1} Y_\nu \quad (4)$$

تُقطر هذه المصفوفة بواسطة المصفوفة  $U^V$  (مصفوفة PMNS):

$$U^{V,*} m_\nu U^{V,\dagger} = \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3})$$

تتعلق المعادلة (4) بكل من مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو  $Y_\nu$  ومصفوفة كتلة نترينو ماجورانا الثقيل  $M_R$ ، وبالتالي إذا كانت  $(Y_\nu \sim \mathcal{O}(1))$  فإن  $M_R \sim \mathcal{O}(10^{15}) \text{ GeV}$  [24][26]. نحتاج من أجل حساب كتلة النترينو عند مقياس الطاقات المنخفضة معرفة قيم كل من  $M_R, Y_\nu$  كمعاملات إدخال تحدد عند مقياس طاقة نظرية التوحيد العظمى (Grand Unified Theory) والذي يكون من مرتبة  $10^{16} \text{ GeV}$ .

نفرض الشروط الشاملة عند مقياس طاقة نظرية التوحيد العظمى ( $M_{GUT}$ ) باستخدام النموذج القياسي فائق التنازير الأصغرى المقيد (CMSSM) وهي:

كتلة كسر التنازير الناعم (Soft-Breaking) السلمية العالمية  $m_0$ ، كتلة كسر التنازير الناعم للجيجينيو العالمية  $m_{1/2}$ ، الاقتران الثلاثي الخطي العالمي  $A_0$  [12][26]. بينما يحدد كل من النسبة المتوقعة في الفراغ لبوزون هيجز  $\tan\beta$  وإشارة معامل امتراد هيجز  $\text{sign}(\mu)$  عند المقياس الكهروضعيف [27].

#### 4- بنية مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو $Y_\nu$ :

إن ثابتى اقتران يوكاوا للبتنونات  $Y_l$  وللنترينو  $Y_\nu$  عبارة عن مصفوفات غير قطيرية، ولكن بشكل عام يعتبر أن  $Y_l$  مصفوفة قطيرية و  $Y_\nu$  مصفوفة غير قطيرية. وهذا يعزز من انتهاك النكهة للبتنونية والتي يمكن ملاحظتها عند الطاقات المنخفضة. في هذه الحالة تكون مصفوفة كتلة للبتنونات فائقة التنازير قطيرية عند مقياس GUT، لكن إدخال معادلات إعادة التنظيم (Renormalization Group Equations-RGEs) من مقياس GUT إلى مقياس التنازير  $M_R$  يؤدي لكسر هذه القطيرية [17]. تمثل المساهمة في امتراد البتنونات فائقة التنازير عند الحلقة الواحدة بمعادلات إعادة التنظيم التالية [17][28]:

$$\left. \begin{array}{l} (\Delta m_L^2)_{ij} = -\frac{1}{8\pi^2} m_0^2 \left\{ 3 + \frac{A_0^2}{m_0^2} \right\} (Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} \log \left( \frac{M_{GUT}}{M_R} \right) \\ (\Delta T_l^2)_{ij} = \frac{-3}{16\pi^2} A_0 Y_l (Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} \log \left( \frac{M_{GUT}}{M_R} \right) \\ (\Delta m_{\tilde{e}}^2)_{ij} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

حيث أن:  $A_0 = a_0 m_0 = a_0 = const$  حيث  $a_0$  ثابت لا وحدة له. وبالتالي  $\frac{A_0}{m_0} = a_0$

نلاحظ من المعادلة (5-a) أن مصفوفة كتلة البتونات اليسارية فائقة التنازد تتلقى مساهمة إضافية من معادلات RGEs عند التشغيل من مقاييس GUT إلى مقاييس كتلة ماجورانا  $M_R$  لعناصرها الغير قطرية وذلك في تقريب اللوغاريتم العشري [28]. كما نلاحظ من المعادلة (5-c) أن معاملات البتونات فائقة التنازد اليميني لا تتلقى أي مساهمة في تقريب اللوغاريتم العشري، وهذا فإن LFV يكون في قطاع البتونات فائقة التنازد اليسارية [12][29][30][31] بسبب وجود حقل التترينو الفائق التنازد اليميني في معادلة الكمون الفائق. إضافة إلى ذلك، نلاحظ من المعادلة (5-b) أن معاملات الاقتران الثلاثي الخطى تكون مجموعية من قبل كتل البتونات المشحونة [30][31][32].

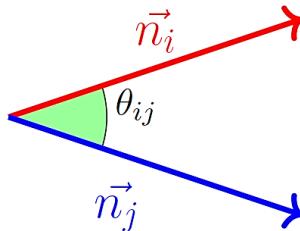
نحتاج إلى تحديد بنية مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو  $Y_\nu$  مع الأخذ بعين الاعتبار مساهمة هذه المصفوفة في انتهاك النكهة البتونية كما هو واضح في معادلات RGEs. كما سنأخذ في الاعتبار القيم الحقيقة لمصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو  $Y_\nu$  من أجل تجنب القيود المحتملة من عزوم ثنائي القطب الكهربائي البتوني ( $Y_\nu^\dagger Y_\nu = Y_\nu^t Y_\nu$ ). من المفيد النظر في تفسير هندسي لمصفوفة اقتران يوكاوا للنترينو، إذ تُفسر عناصرها في فضاء النكهة كمركبات ثلاثة متجهات للنترينو ( $\mathbf{n}_e, \mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_\tau$ ). يمكن كتابة المصفوفة  $Y_\nu$  في فضاء النكهة بالشكل الآتي [3]:

$$Y_\nu = \begin{pmatrix} y_{\nu 11} & y_{\nu 12} & y_{\nu 13} \\ y_{\nu 21} & y_{\nu 22} & y_{\nu 23} \\ y_{\nu 31} & y_{\nu 32} & y_{\nu 33} \end{pmatrix} \equiv f(\mathbf{n}_e, \mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_\tau) \quad (6)$$

حيث تمثل  $f$  شدة اقتران يوكاوا للنترينو. إن الجداء  $Y_\nu^t Y_\nu$  الموجود في معادلات RGEs يرتبط بعمليات انتهاك النكهة البتونية. يمكن كتابة الجداء  $Y_\nu^t Y_\nu$  بالشكل الآتي:

$$Y_\nu^t Y_\nu = f \begin{pmatrix} \mathbf{n}_e \\ \mathbf{n}_\mu \\ \mathbf{n}_\tau \end{pmatrix} \cdot f(\mathbf{n}_e \ \mathbf{n}_\mu \ \mathbf{n}_\tau) = f^2 \begin{pmatrix} |\mathbf{n}_e|^2 & \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\mu & \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\tau \\ \mathbf{n}_\mu \cdot \mathbf{n}_e & |\mathbf{n}_\mu|^2 & \mathbf{n}_\mu \cdot \mathbf{n}_\tau \\ \mathbf{n}_\tau \cdot \mathbf{n}_e & \mathbf{n}_\tau \cdot \mathbf{n}_\mu & |\mathbf{n}_\tau|^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

حيث أنّ:  $C_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$  تمثل الزاوية بين نكهات الترينو الثلاث  $C_{\tau\mu}, C_{\mu e}, C_{\tau e}$  كما في الشكل (1). تُعتمد تسمية الزاوية على حقيقة أنّ جيب تمام الزاوية  $\theta_{ij}$  يتحكم في انتقالات انتهاء النكهة اللبتونية ضمن القطاع  $l_j - l_i$ . بناءً عليه، يمكن اعتبار معاملات الإدخال التسعة التي تحدد المصفوفة  $Y_\nu$  على النحو التالي: ثلاثة قيم لطويلة متجهات الترينو الثلاث ( $|\mathbf{n}_e|, |\mathbf{n}_\mu|, |\mathbf{n}_\tau|$ )، وثلاث زوايا بين هذه المتجهات مرتبطة بنكهات الترينو الثلاث ( $\theta_{\tau\mu}, \theta_{\mu e}, \theta_{\tau e}$ )، إضافة إلى ثلاثة زوايا إضافية ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) والتي تحدد عملية الدوران الكلي ( $\mathcal{O}$ ) للمتجهات الثلاثة للنيوترينو دون تغيير الزوايا المرتبطة بنكهات [3][33].



الشكل - 1: الزاوية بين نkehات الترينو الثلاث.

بما أنّ قيم المصفوفة  $Y_\nu$  حقيقة، لذلك فإنه يمكن كتابة المصفوفة  $Y_\nu$  على أنها حاصل ضرب مصفوفتين بالشكل التالي:

$$Y_\nu = \mathcal{O} \cdot A \quad (8)$$

تمثل  $\mathcal{O}$  مصفوفة الدوران المتعامدة ولا تدخل في الجداء  $Y_\nu^t Y_\nu$  حيث أنّ  $\mathcal{O}^t \mathcal{O} = I$ ، وبالتالي فهي لا تؤثر على دراسة انتهاء النكهة اللبتونية [3][33]. بينما تحدد عناصر المصفوفة  $A$  وفقاً لثلاثة سيناريوهات محتملة: تاو-إلكترون ( $\tau e$ )، تاو-ميون ( $\tau \mu$ )، ميون-إلكترون ( $\mu e$ ) . في سيناريو  $\tau e$ ، نعوض  $C_{\tau\mu} = C_{\mu e} = 0$  في المعادلة (7) حيث أنّ كل من  $(\mathbf{n}_\tau, \mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_e)$  و  $(\mathbf{n}_\tau, \mathbf{n}_\mu, \mathbf{n}_e)$  أشعة متعامدة، فنحصل على المعادلة التالية:

$$Y_\nu^t Y_\nu = f^2 \begin{pmatrix} |n_e|^2 & 0 & |n_\tau| \cdot |n_e| C_{\tau e} \\ 0 & |n_\mu|^2 & 0 \\ |n_\tau| \cdot |n_e| C_{\tau e} & 0 & |n_\tau|^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

يمكن كتابة مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينيو من أجل السيناريو  $\tau e$  بالشكل الآتي:

$$Y_{\nu_{\tau e}} = \mathcal{O} \cdot A_{\tau e} = \mathcal{O} \cdot f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & |n_\tau| C_{\tau e} \\ 0 & |n_\mu| & 0 \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau e}^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

نحصل على المعادلة (7) عند حساب ناتج الجداء  $Y_\nu^t Y_\nu$ . وبالتالي في هذه الحالة تكتب المصفوفة  $A_{\tau e}$  بالشكل الآتي:

$$A_{\tau e} = f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & |n_\tau| C_{\tau e} \\ 0 & |n_\mu| & 0 \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau e}^2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

في سيناريو  $\tau \mu$ ، نعرض  $C_{\tau e} = C_{\mu e} = 0$  في المعادلة (7) حيث أن كل من أشعة متعامدة. في هذه الحالة، تكتب مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينيو  $(n_\tau, n_e)$  و  $(n_\mu, n_e)$  بالشكل الآتي:

$$Y_{\nu_{\tau \mu}} = \mathcal{O} \cdot A_{\tau \mu} = \mathcal{O} \cdot f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & 0 \\ 0 & |n_\mu| & |n_\tau| C_{\tau \mu} \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau \mu}^2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

أما المصفوفة  $A_{\tau \mu}$ ، فتكتب بالشكل الآتي:

$$A_{\tau \mu} = f \begin{pmatrix} |n_e| & 0 & 0 \\ 0 & |n_\mu| & |n_\tau| C_{\tau \mu} \\ 0 & 0 & |n_\tau| \cdot \sqrt{1 - C_{\tau \mu}^2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

بينما في سيناريو  $\mu e$ ، نعرض  $C_{\tau e} = C_{\tau \mu} = 0$  في المعادلة (7) حيث أن كل من أشعة متعامدة. في هذه الحالة، تكتب مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينيو  $(n_\tau, n_e)$  و  $(n_\tau, n_\mu)$  بالشكل الآتي:

$$Y_{\nu_{\mu}e} = \mathcal{O}.A_{\mu e} = \mathcal{O}.f \begin{pmatrix} |n_e| \sqrt{1 - C_{\mu e}^2} & 0 & 0 \\ |n_e| C_{\mu e} & |n_{\mu}| & 0 \\ 0 & 0 & |n_{\tau}| \end{pmatrix} \quad (14)$$

أما المصفوفة  $A_{\mu e}$ ، فتكتب بالشكل الآتي:

$$A_{\mu e} = \mathcal{O}.f \begin{pmatrix} |n_e| \sqrt{1 - C_{\mu e}^2} & 0 & 0 \\ |n_e| C_{\mu e} & |n_{\mu}| & 0 \\ 0 & 0 & |n_{\tau}| \end{pmatrix} \quad (15)$$

قد يُنتج سيناريو  $\tau \mu$  معدلات عالية للانتقالات  $\mu - \tau$ ، ولكنه يُعطي دائمًا مساهمات ضئيلة في  $LFV_{\mu e}$  و  $LFV_{\tau e}$ . بينما قد يُنتج سيناريو  $\tau e$  معدلات كبيرة للانتقالات  $e - \tau$ ، ولكنه يُعطي دائمًا مساهمات ضئيلة في  $LFV_{\mu e}$  و  $LFV_{\tau \mu}$ . بينما يُنتج سيناريو  $ME$  معدلات عالية فقط للانتقالات  $e - \mu$ . [33]

## 5- انتهاك النكهة البتونية في تفكك البوzon $Z \rightarrow l_i l_j$

يُحفّز انتهاك نكهة البتونات فائقة التناقض المشحونة اقترانات التيار المحايد المُغيّر للنكهة (Flavor-Changing Neutral-Current Couplings)  $Z \tilde{l} \tilde{l} \tilde{\chi}^0 \tilde{\chi}^0$ ، بينما يُحفّز انتهاك نكهة النتريلات الفائقة التناقض اليسري اقترانات التيار المشحون المُغيّر للنكهة (Flavor-Changing Charged-Current Couplings)  $Z \tilde{l} \tilde{l} \tilde{\chi}^+ \tilde{\chi}^-$ . شاهم هذه الاقترانات المُغيّرة للنكهة في تفكّكات انتهاك النكهة البتونية للبوزون  $Z$  [34][17]، كما هو موضح في الشكل (2). يمكن كتابة لاغرانجيان تفكّكات انتهاك النكهة البتونية للبوزون  $Z$  على النحو التالي [35][9]:

$$\mathcal{L}_{Z l_i l_j} = \bar{l}_j [\gamma^{\mu} (A_1^L P_L + A_1^R P_R) + p^{\mu} (A_2^L P_L + A_2^R P_R)] l_i Z_{\mu} \quad (16)$$

إذ تمثل  $\gamma^{\mu}$  مصفوفات ديراك (مصفوفات غاما)، أما  $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$  فإنها تمثل مؤثر الإسقاط اليساري واليميني، وتمثل  $p$  المركبة الرابعة لكمية الحركة للبتون  $l_j$ . بينما تمثل  $Z_{\mu}$  حقل البوزون  $Z$ . أما المعاملات  $A_1^L, A_1^R, A_2^L, A_2^R$  فيمكن حسابها من ساعات

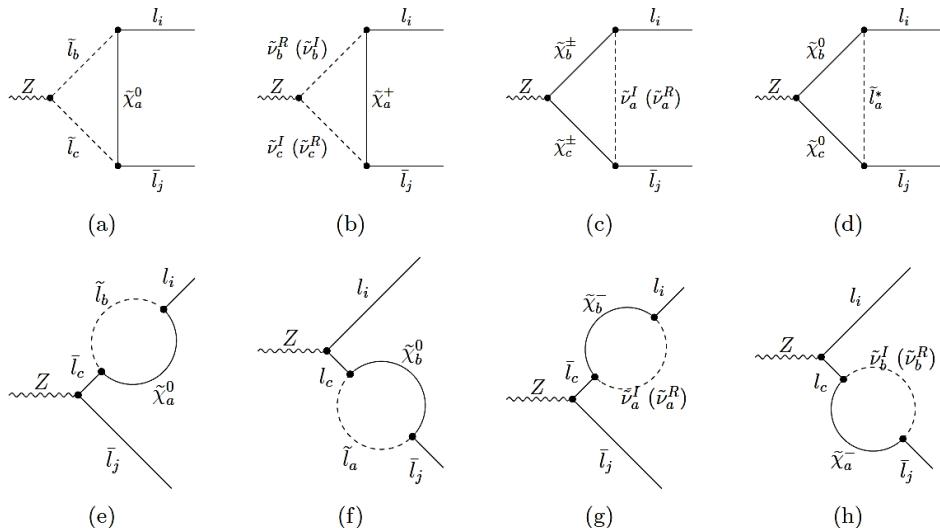
مخططات فاينمان الموضحة في الشكل (2). بإهمال كتل الليتونات المشحونة، يمكننا كتابة معادلة نسبة التفرع لتفكك انتهاك النكهة الليتونية للبوزون  $Z$  كما يلي [9] [35] [36]:

$$BR(Z \rightarrow l_i l_j) = BR(Z \rightarrow l_i \bar{l}_j) + BR(Z \rightarrow \bar{l}_i l_j) \quad (17)$$

$$BR(Z \rightarrow l_i l_j) = \frac{\Gamma(Z \rightarrow l_i \bar{l}_j) + \Gamma(Z \rightarrow \bar{l}_i l_j)}{\Gamma_Z} = \frac{\Gamma(Z \rightarrow l_i l_j)}{\Gamma_Z} \quad (18)$$

تمثل  $\Gamma_Z$  العرض الطاقي الكلي لتفكك البوزون  $Z$  [37]. بينما نكتب العرض الطاقي الجزئي  $\Gamma(Z \rightarrow l_i l_j)$  بالشكل الآتي [36] [35]

$$\Gamma(Z \rightarrow l_i l_j) = \frac{m_Z}{48\pi} [2(|A_1^L|^2 + |A_1^R|^2) + \frac{m_Z^2}{4} (|A_2^L|^2 + |A_2^R|^2)] \quad (19)$$



الشكل - 2: مساهمة مخططات فاينمان للحلقة الواحدة في نسبة التفرع لانتهاك النكهة الليتونية في تفكك البوزون  $Z$  ضمن النموذج **MSSM-SeeSaw-III**.

تمثل المعاملات  $A_1^{L,R}, A_2^{L,R}$  مجموع المعاملات المقابلة لمساهمة كل مخطط من مخططات فاينمان في انتهاك النكهة الليتونية في البوزون  $Z$  الموضحة بالشكل (2). ومنه نكتب:

$$A_1^{L/R} = A_{1a}^{L/R} + A_{1b}^{L/R} + A_{1c}^{L/R} + A_{1d}^{L/R} + A_{1e}^{L/R} + A_{1f}^{L/R} + A_{1g}^{L/R} + A_{1h}^{L/R} \quad (20)$$

$$A_2^{L/R} = A_{2a}^{L/R} + A_{2b}^{L/R} + A_{2c}^{L/R} + A_{2d}^{L/R} + A_{2e}^{L/R} + A_{2f}^{L/R} + A_{2g}^{L/R} + A_{2h}^{L/R} \quad (21)$$

تستنتج مساهمات حلقات النترالينو-اللبتونات فائقة التناظر من الشكل 2 (a, d, e, f)، بينما تستنتج مساهمات حلقات الشارجينو-النترينوات فائقة التناظر من الشكل 2 (b, c, g, h). إن العلاقات الرياضية لمساهمات مخططات فاينمان (المعادلة 20، 21) موجودة في المقالة المنشورة في المجلة البرازيلية [38].

## 6- النتائج العددية والمناقشة:

تم الحصول على النتائج العددية بواسطة حزم البرمجيات التالية: ساره (SARAH)، سفينو (SPheno) وحزمة برمجيات انتهاء النكهة اللبناني (FlavorKit). كما طُبّقت معادلات RGE ثنائية الحلقات (Two-Loops) [39][40][41][42]. وفقاً للنموذج الفيزيائي CMSSM-Seesaw-I المستخدم في هذه الدراسة، فإن معاملات الإدخال النهائية هي:  $m_0$ ،  $m_{1/2}$ ،  $A_0$ ،  $m_e$ ،  $|n_\mu|$ ،  $|n_\tau|$ ،  $f$ ،  $\tan\beta$ ،  $C_{\tau\mu}$ ،  $C_{\tau e}$ ،  $C_{\mu e}$ ،  $M_R$ ،  $Y_\tau$ ، و  $sign(\mu)$ . عند إجراء الحسابات العددية، تُقيّد معاملات كسر التناظر الناعم بالعديد من الشروط النظرية والتجريبية. مثل انحفاظ الزوجية R-Parity (R-Parity)، وأخف جسيم من جسيمات التناظر الفائق (SUSY) في النموذج المدروس هو النترالينو.

الجدول (2): الحدود الدنيا التجريبية لكتل الجسيمات فائقة التناظر.

النترينوات فائقة التناظر	الشارجينو	النترالينو	اللبتونات فائقة التناظر	الجسيمة
94	94	46	107	حد الكتلة (GeV)

إضافة إلى ذلك، يجب أن تكون كتل جسيمات التناظر الفائق (الشارجينو، النترالينو، اللبتونات فائقة التناظر، والنترينوات فائقة التناظر) والتي تُحسب بواسطة الحزمة SPheno أعلى أو تساوي الحدود الدنيا التجريبية لكتل الجسيمات لنتائج التجارب في الوقت الحالي [37]، كما هو موضح في الجدول (2).

ترتبط كتل جسيمات التاظر الفائق بكل من  $m_0$ ،  $m_{1/2}$ ، لذلك سنحدد القيمة الدنيا لكل منها تبعاً للشروط السابقة وبالتالي نجد أن  $GeV = 150$ . كما يُحدد مجال قيم كل من  $A_0$  و  $\tan\beta$  عن طريق تشغيل الـ SPheno دون أن ينتج لدينا أي خطأ. تحدث الأخطاء لسبعين رئيسين: (i) خارج مجال قيم  $\tan\beta$  و  $A_0$ ، تصبح قيم ثوابت الاقتران المعيارية (Gauge Coupling) كبيرة عند مقياس  $M_{GUT}$  وذلك بسبب أن توابع بيئتا تكون كبيرة. وبالتالي، ستفشل نظرية الاضطراب لأنها لم تعد توفر حلاً تقربياً قابلاً للاستخدام في حساب العمليات الفيزيائية. (ii) الحصول على مربع كتلة سالب لجسيمات التاظر الفائق [43]. يبين الجدول (3) قيم معاملات الإدخال المستخدمة في هذه الدراسة.

الجدول (3): مجال قيم معاملات الإدخال المستخدمة في هذه الدراسة، مع العلم أن  $A_0 = a_0 m_0$

$\cos(\theta_{ij})$	$\tan\beta$	$a_0$	$m_{1/2}$ (GeV)	$m_0$ (GeV)	المعامل
[0.087, 0.710]	[5, 15]	[-2, 4]	[150, 350]	[250, 635]	القيم

انطلاقاً من المعادلات (4، 11، 13، 15)، يمكن تقدير قيم عناصر كل من مصفوفة اقتران يوكاوا للتنرينو  $Y_\nu$  ومصفوفة كتلة نترینوات ماجورانا  $M_R$  وفقاً للحد الأعلى التجريبي الحالي لكتلة النيوترينو الخفيف، والمقدّرة بأنها أصغر من  $0.8\text{ eV}$  عند مقياس الطاقة المنخفضة [44]. في هذه الدراسة، نحدد قيماً كبيرةً لعناصر المصفوفة  $Y_\nu$ ، لذلك يجب التتحقق من أنّ هذه القيم لا تزال ضمن نطاق نظرية الاضطراب. وبناءً عليه، يُحدّد القيد (الشرط) على القيم العظمى المسموح بها لمدخلات عناصر المصفوفة  $Y_\nu$  كما يلي:  $\cos(\theta_{ij}) |(Y_\nu)_{ij}|^2 < 4\pi$  [3]. وبالتالي نجد أن  $M_R \geq 5 \times 10^{13}\text{ GeV}$ ، و  $\cos(\theta_{ij}) \leq 0.71$ ، كما حيث اعتبرنا الحالة المتحللة لكتلة نترینو ماجورانا ( $M_R = M_{R1} = M_{R2} = M_{R3}$ )، كما أنّ شدة اقتران يوكاوا للتنرينو  $f = sign(\mu) > 0$  بالإضافة إلى اعتبار جميع الحسابات العددية.

كما أنه لدينا وفقاً للمعادلات (11، 13، 15) ثلاث سيناريوهات لمصفوفة اقتران يوكاوا للنترينيو  $Y_\nu$  لدراسة انتهاك النكهة البتونية لتفككات البوzon  $Z$ . يبيّن الجدول (4) قيم المدخلات  $|n_\tau|, |n_\mu|, |n_e|$  لكل سيناريو من السيناريوهات الثلاث. كما ثبتت قيمة مقياس طاقة نظرية التوحيد العظمى عند  $M_{GUT} = 2.00 \times 10^{16} \text{ GeV}$ , وكذلك ثبتت قيمة مقياس كسر التمازن الفائق عند [45]  $M_{SUSY} = 10^3 \text{ GeV}$ .

الجدول (4): سيناريوهات مصفوفة اقتران يوكاوا للنترينيو المستخدمة في الحسابات العددية.

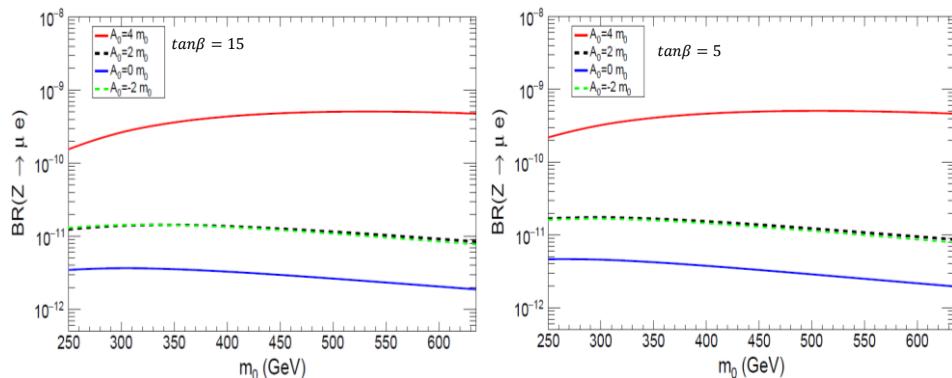
المصفوفة	$ n_\tau $	$ n_\mu $	$ n_e $	$C_{\mu e}$	$C_{\tau e}$	$C_{\tau \mu}$	السيناريو
$y_\nu = f \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_{\tau \mu} \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - C_{\tau \mu}^2} \end{pmatrix}$	1	1	0.1	0	0	$C_{\tau \mu}$	$\tau \mu$
$y_\nu = f \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_{\tau e} \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - C_{\tau e}^2} \end{pmatrix}$	1	0.1	1	0	$C_{\tau e}$	0	$\tau e$
$y_\nu = f \begin{pmatrix} \sqrt{1 - C_{\mu e}^2} & C_{\mu e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$	0.1	1	1	$C_{\mu e}$	0	0	$\mu e$

ستتم دراسة  $(l_i l_j \rightarrow BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  مع (بدون) تطبيق القيود المفروضة من التفككات الإشعاعية  $(l_i \rightarrow l_i \gamma)$  الغير مكتشفة تجريبياً.

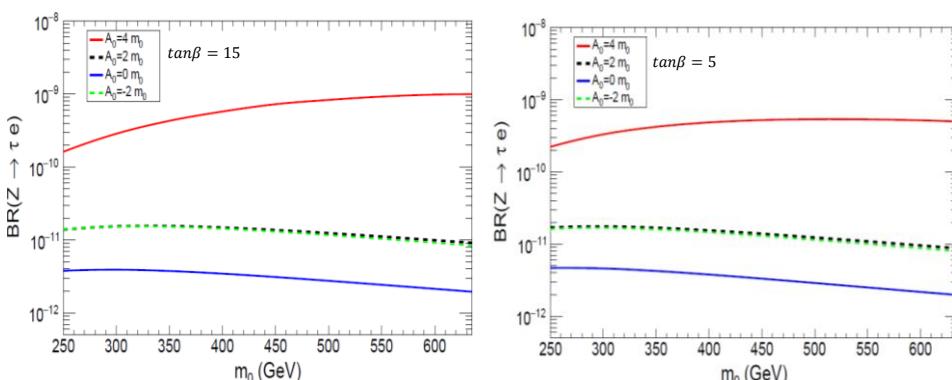
5-1- تغيرات نسبة التفرع  $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  بدون فرض قيود من التفككات  $(l_i l_j \rightarrow BR(Z \rightarrow l_i l_j))$ :

سنعتبر في هذه الحالة أن تفككات انتهاك النكهة البتونية للبوزون  $Z$  غير مرتبطة بتفككات جسيمات أخرى، مثل التفككات الإشعاعية. تظهر الأشكال (3، 4، 5) تغيرات نسبة التفرع لانتهاك النكهة البتونية لتفكك البوزون  $Z \rightarrow l_i l_j$  ( $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ ) بدلالة  $m_0$  عند  $A_0 = (0, \pm 2, 4)$  و  $\tan\beta = 5, 15$ . أما بقية المعاملات فهي كالتالي:  $f = 1$ .

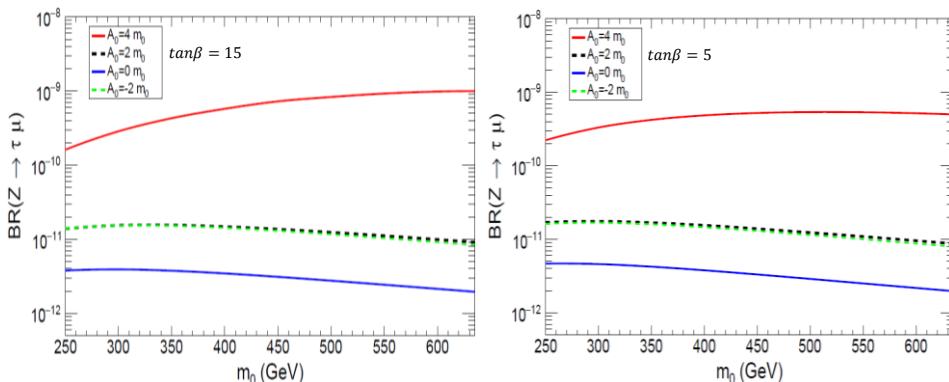
نلاحظ من  $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$  و  $\cos(\theta_{ij}) = 0.71$  ،  $m_{1/2} = 150 \text{ GeV}$  أن قيمة ثابت الاقتران الثلاثي  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  تتعلق بشكل كبير بقيمة  $A_0$  . الأشكال (3، 4، 5) توضح ذلك



الشكل - 3: تغيرات  $BR(Z \rightarrow \mu e)$  بدلالة  $m_0$



الشكل - 4: تغيرات  $BR(Z \rightarrow \tau e)$  بدلالة  $m_0$



الشكل - 5: تغيرات  $BR(Z \rightarrow \tau\mu)$  بدلالة  $m_0$ .

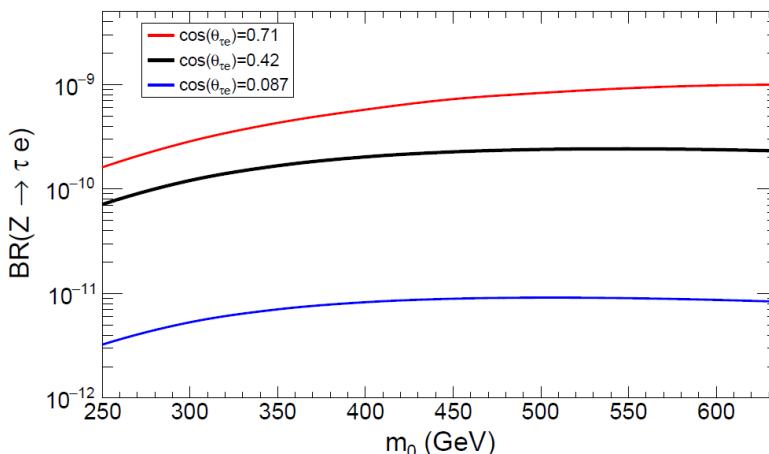
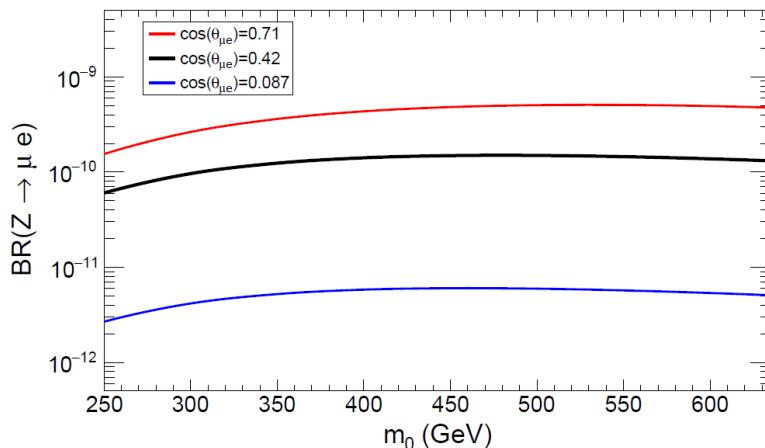
الخطي  $A_0$  حيث تزداد قيم نسبة التفرع  $(Z \rightarrow l_i l_j)$  بشكل واضح بازدياد قيم  $A_0$  وذلك عند قيمة معينة  $m_0$ . وهذا يعني أن زيادة شدة الاقتران بين الفرميونات فائقة التاظر وبيوزون هيجز يزيد من قيم  $(Z \rightarrow l_i l_j)$ , وبالتالي تكون أفضل قيم لـ  $(Z \rightarrow l_i l_j)$  عند  $A_0 = \pm 2m_0$ . كما نلاحظ أن قيم  $(Z \rightarrow l_i l_j)$  تكون متساوية عند  $A_0 = 4m_0$ . كما يلاحظ أن  $A_0 = 4m_0$  هي ثابت الاقتران الثلاثي  $A_0$  من معادلات إعادة التنظيم RGEs، يكون متناسب مع  $A_0^2$  وعلى التوالي (المعادلات 5-b, 5-a).

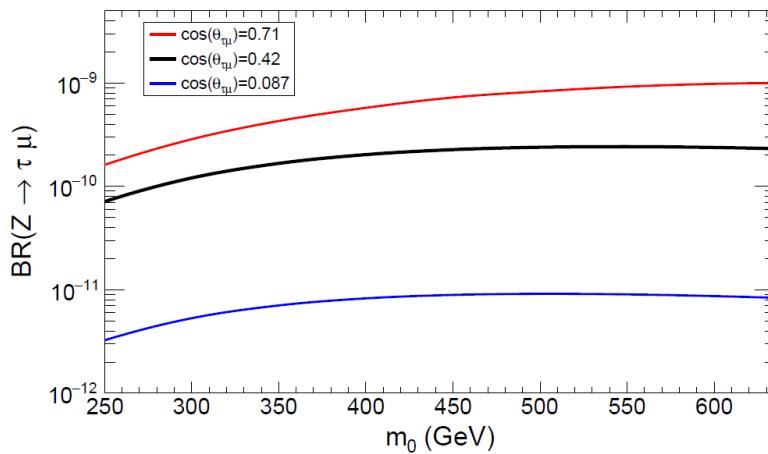
إضافة إلى ذلك، نلاحظ عند  $A_0 = 0, \pm 2m_0$ ,  $\tan\beta = 5, 15$ ، و  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  بسيط جداً في قيم  $m_0$  من  $250$  to  $635$  GeV وذلك عندما تزداد قيم  $m_0$  من  $250$  إلى  $635$  GeV، حيث تكون  $BR(Z \rightarrow \tau\mu) = BR(Z \rightarrow \tau e) = BR(Z \rightarrow \mu e)$ ، حيث تزداد قيم نسبة التفرع  $BR(Z \rightarrow \tau\mu) = BR(Z \rightarrow \tau e)$ ، فإن  $A_0 = 4m_0$ ، و  $A_0 = 4m_0$ ، حيث تزداد قيم  $BR(Z \rightarrow \mu e)$ ، وإنما قيم  $BR(Z \rightarrow \mu e)$  لكل من القناتين من  $1.0 \times 10^{-9}$  حتى  $1.6 \times 10^{-10}$ . أما قيم  $BR(Z \rightarrow \tau\mu)$  فإنها تكون ضمن المجال  $[5 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-10}]$  بشكل تقربي.

يظهر الشكل (6) تغيرات نسبة التفرع  $(Z \rightarrow l_i l_j)$  بدلالة  $m_0$  عند ثلاثة قيم مختلفة لـ  $A_0$  وهي  $\cos\theta_{ij} = 0.71, 0.42, 0.087$ . معأخذ الحالة  $A_0 = 4m_0$  بعين الاعتبار، أما قيم بقية المعاملات فهي كما يلي:  $m_{1/2} = 150$  GeV,  $f = 1$ .

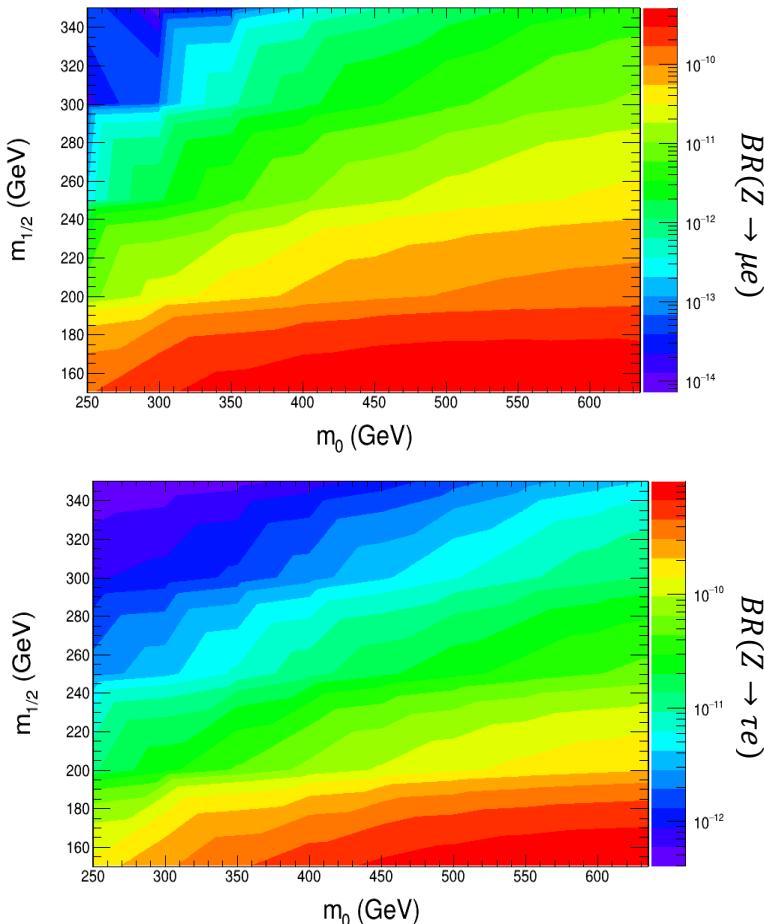
15، و  $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$ . نلاحظ من الشكل (6) أنَّ قيم  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  تزداد بوضوح مع ازدياد قيم  $\cos(\theta_{ij})$  وذلك عند قيمة معينة  $m_0$ . يعود سبب ذلك إلى أنَّ مساهمة الجداء  $Y_\nu^t Y_\nu$  الموجود في معادلات RGEs تزداد مع ازدياد قيمة  $\cos(\theta_{ij})$ ، حيث أنَّ  $(Y_\nu^t Y_\nu)_{ij} = f^2 \cos(\theta_{ij})$ . بالإضافة إلى ذلك، تزداد كتلة النترینو الخفيف بازدياد قيمة الجداء  $Y_\nu^t Y_\nu$  وفقاً للمعادلة (4). كما نلاحظ أنَّ أعلى قيمة لنسبة التفرع  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  تتحقق عند  $m_0 = 635 \text{ GeV}$ ، و  $\cos(\theta_{ij}) = 0.71$  مع العلم أنَّ  $A_0 = 4m_0$ . تبلغ القيمة العددية لنسبة التفرع في هذه الحالة القيم التالية:

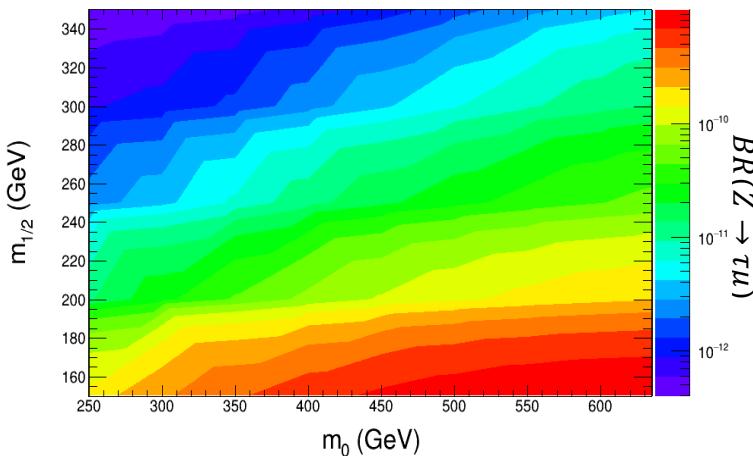
$$BR(Z \rightarrow \mu e) = 5 \times 10^{-10}, BR(Z \rightarrow \tau \mu) = BR(Z \rightarrow \tau e) = 1.0 \times 10^{-9}$$





الشكل - 6: تغيرات نسبة التفرع  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  بدلالة  $m_0$  عند  $m_{1/2} = 15$  و  $A_0 = 4m_0$  و  $\tan\beta = 15$





الشكل - 7: المخطط الكنتوري لتغيرات  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  في فضاء المعاملين  $m_0$ ،  $m_{1/2}$ .

كما تكون  $BR(Z \rightarrow \tau\mu) = BR(Z \rightarrow \tau e) \approx BR(Z \rightarrow \mu e)$  عند كل من  $250 \text{ GeV}$  و  $635 \text{ GeV}$  وذلك عندما تغير قيم  $\cos(\theta_{ij}) = 0.087$  و  $\cos(\theta_{ij}) = 0.42$  إلى  $m_0$  من  $250 \text{ GeV}$  إلى  $635 \text{ GeV}$ .

يظهر الشكل (7) تغيرات  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  كمخطط كنتوري في فضاء المعاملين  $A_0 = 4m_0$ ،  $m_0$ ،  $m_{1/2}$ ، حيث تم تثبيت قيم المعاملات الأخرى كما يلي:  $f = 1$ ،  $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$ ،  $\cos(\theta_{ij}) = 0.71$ ،  $\tan\beta = 15$  مع ازدياد قيم  $m_{1/2}$  من  $150 \text{ GeV}$  إلى  $350 \text{ GeV}$  عند أي قيمة ثابتة  $m_0$ . على العكس، تزداد قيم  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  مع ازدياد قيم  $m_0$  من  $250 \text{ GeV}$  إلى  $635 \text{ GeV}$  عند أي قيمة ثابتة  $m_{1/2}$ . كما تكون أفضل قيم  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  في المنطقة ذات اللون الأحمر حيث أن  $m_0 \in [150, 175] \text{ GeV}$  و  $m_{1/2} \in [150, 175] \text{ GeV}$  وبالنسبة للقناتين  $(Z \rightarrow \tau\mu)$ ،  $(Z \rightarrow \tau e)$ ، و  $(Z \rightarrow \mu e)$  فإن  $m_0 \in [440, 635] \text{ GeV}$  و  $m_{1/2} \in [150, 175] \text{ GeV}$  تقريبا.

3-5 دراسة نسبة التفرع  $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  عند فرض قيود من التفككتات  $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$

ندرس في هذا القسم تغيرات  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  بعد تطبيق قيود  $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  لم يتم الكشف تجريبياً عن التفككتات الإشعاعية التي تخرق النكهة البتونية  $(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ .

وبالتالي فإنّ قيم BRs لهذه التفككتات مقيدة بالحدود العليا التجريبية كما هو موضح في الجدول (5).

الجدول (5): الحدود العليا التجريبية للتفككتات الإشعاعية لجسيمين ( $l_i \rightarrow l_j \gamma$ ) [46] [47].

اسم التجربة	الحد الأعلى	التفكك
Belle	$4.2 \times 10^{-8}$	$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)$
Belle	$5.6 \times 10^{-8}$	$BR(\tau \rightarrow e\gamma)$
MEG	$4.2 \times 10^{-13}$	$BR(\mu \rightarrow e\gamma)$

في التناظر الفائق، يمكن أن يكون مصدر عمليات LFV العناصر الغير قطعية في مصفوفة كتلة البتونات فائقة التناظر اليسرى (بحسب معادلات RGEs). لذلك، يمكن تقريب علاقة BRs للتفككتات ( $l_i \rightarrow l_j \gamma$ ) في نظرية إدخال الكتلة (Mass Insertion) بواسطة التقرير اللوغاريتمي، كما يلي [30][43]:

$$BR(l_i \rightarrow l_j \gamma) \propto \alpha^3 m_{l_i}^5 \frac{|\Delta m_{L_{ij}}^2|}{\tilde{m}^8} \tan^2(\beta) \quad (22)$$

تمثل  $\alpha$  ثابت الاقتران الكهروضعيف،  $m_{l_i}$  كتلة البتون  $i$ . كما تمثل  $\tilde{m}$  القيمة الوسطية لكتل جسيمات التناظر الفائق الداخلة في الحلقات (Loops).

نلاحظ من المعادلتين (5-a) و (22) أنّ  $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  تتعلق بشكل رئيس بمقاييس كتل جسيمات التناظر الفائق والعناصر غير القطعية لمصفوفة كتلة البتونات فائقة التناظر اليسارية. تخضع العناصر غير القطعية بشكل شبه كامل لاختيار قيم معاملات كسر التناظر الناعم الفائق (Soft SUSY Breaking) ضمن قطاع آلية التأرجح التثبيط. بالإضافة إلى ذلك، تتناسب  $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  طردياً مع  $\tan^2(\beta)$  وهذا يؤدي إلى قيم مرتفعة لنسب تفرع انتهاء النكهة البتونية. لذلك، تم تثبيت  $A_0 = 0 \text{ GeV}$  (لاستبعاد مساهمة الاقترانات الخطية الثلاثية) و  $5 = \tan\beta =$  لجميع الحسابات العددية. كما تم تثبيت التناظر الفائق كما هو موضح في الجدول (3).

نعتبر انتهاك النكهة اللبتونية في التفككتات  $(l_j \gamma \rightarrow l_i)$  مقيداً لقيمة ثابت شدة اقتران يوكاوا للنترلينو  $f$ , بينما تكون قيم عناصر مصفوفة اقتران يوكاوا  $Y$  كما هو موضح في الجدول (4). يظهر الشكل (8) مخططات فاينمان للجسيمات فائقة التناظر التي تساهم في حدوث انتهاك النكهة اللبتونية للتفككتات  $(l_j \gamma \rightarrow l_i)$  في النموذج المدروس-  
MSSM-  
Seesaw-I

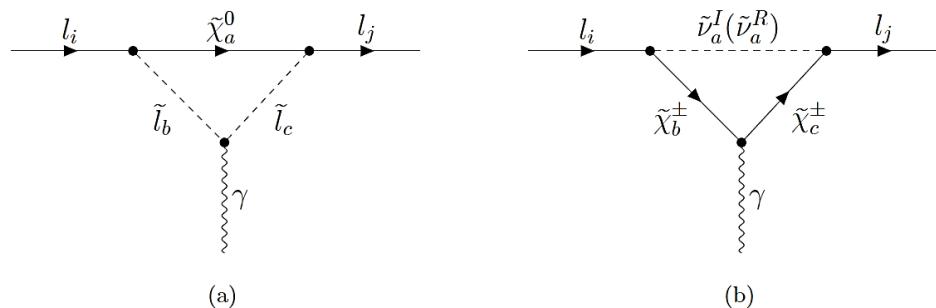
تكتب العلاقة الرياضية التحليلية لنسب التفرع للتفككتات  $(l_j \gamma \rightarrow l_i)$  بالشكل الآتي [35]:

$$BR(l_j \gamma \rightarrow l_i) = \alpha \frac{m_{li}^5}{\Gamma_{l_i}} (|K_2^L|^2 + |K_2^R|^2) \quad (23)$$

يمثل  $\Gamma_{l_i}$  العرض الطافي الكلي لتفكك اللبتون  $l_i$ . كما تمثل  $K_2^{L,R}$  مجموع المعاملات المقابلة لكل مخطط من مخططات فاينمان الموضحة بالشكل (8). ومنه نكتب:

$$K_2^{L/R} = K_{2a}^{L/R} + K_{2b}^{L/R} \quad (24)$$

إن المعادلات الرياضيات للمعاملات  $K_{2a}^{L/R}$  و  $K_{2b}^{L/R}$  موضحة في المقالة الأولى المنشورة في المجلة البرازيلية للفيزياء.

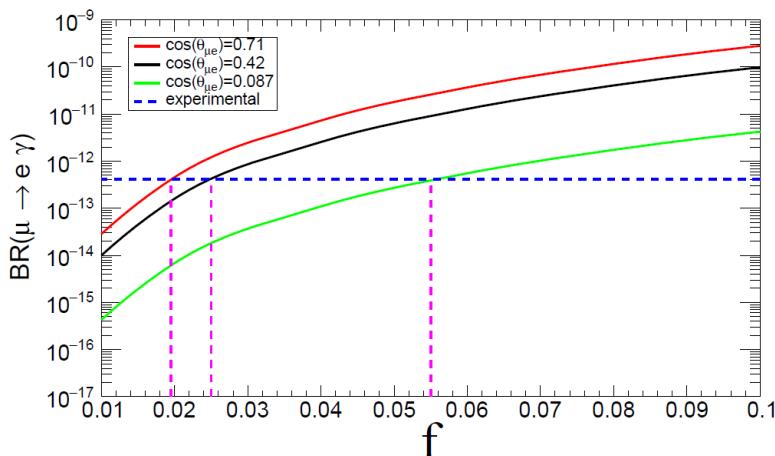


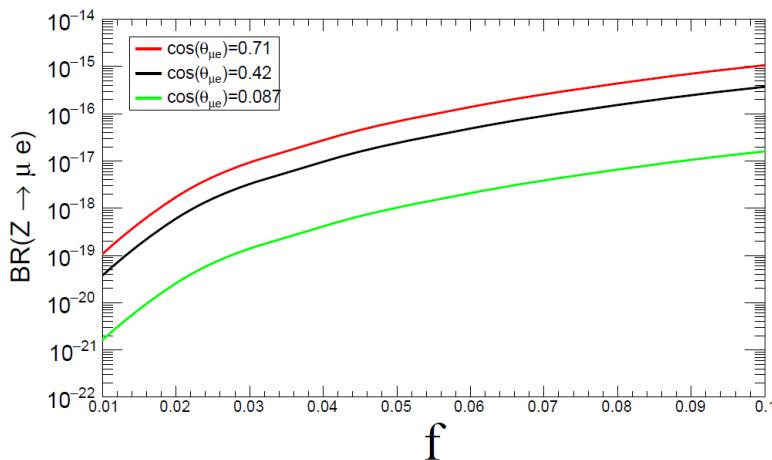
الشكل - 8: مخططات فاينمان ذات الحلقة الواحدة التي تساهم في  $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  في النموذج-  
MSSM-  
Seesaw-I. (a) مساهمات حلقات اللبتونات فائقة التناظر-النترالينو. (b) مساهمات حلقات النترلينوات فائقة التناظر-الشارجينو.

تظهر الأشكال (9-11) تغيرات كل من  $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  و  $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  بدلالة المعامل  $f$  عند  $\cos(\theta_{ij}) = 0.71, 0.42, 0.087$ . تم تثبيت قيم المعاملات الأخرى كما يلي:  $M_R = 5 \times m_{1/2} = 150 \text{ GeV}$  ،  $m_0 = 270 \text{ GeV}$  ،  $\tan\beta = 5$

$A_0 = 0 \text{ GeV}$ ,  $10^{13} \text{ GeV}$ . يمثل الخط الأزرق المنقط الأفقي الحد التجريبي الحالي لـ  $BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)$  كما هو موضح في الجدول (6).

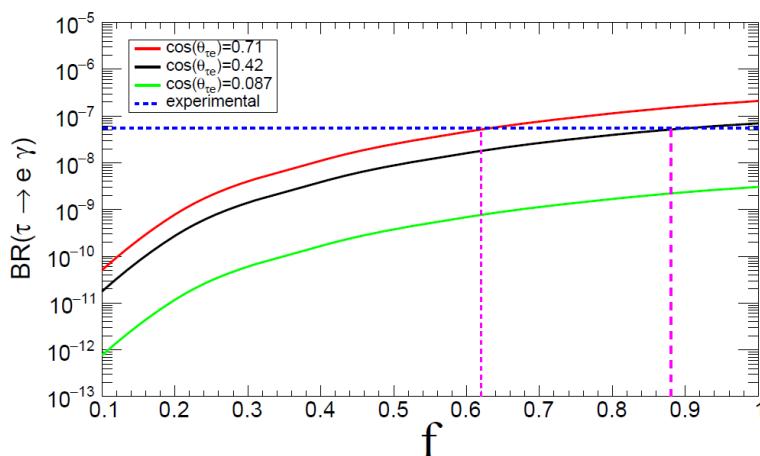
نبدأ المناقشة والحسابات العددية من تفککات الميون ( $\mu$ ) بسبب أنّ القيود التجريبية المفروضة عليها هي الأكثر صرامة من بين كل من الإلكترون (e) والتاو ( $\tau$ ). نلاحظ ازدياد قيم كلّاً من  $BR(Z \rightarrow \mu e)$ ,  $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$  مع ازدياد قيم المعامل  $f$  من 0.01 إلى 0.1، كما موضح بالشكل (9). كما يتجاوز التنبؤ بقيم  $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$  الحد التجاريي الحالي عند  $f = 0.0195, 0.025, 0.055$ . وهكذا فإنّ القيمة العددية لـ  $BR(Z \rightarrow \mu e)$  هي  $1.57 \times 10^{-18}$  عند  $\cos(\theta_{\mu e}) = 0.71$ ,  $0.087$  عند  $1.53 \times 10^{-18}$ ,  $0.42$  عند  $1.47 \times 10^{-18}$ . ومنه فإنّ  $BR(Z \rightarrow \mu e) \approx 1.5 \times 10^{-18}$  عند فرض قيود تفکک  $(\mu \rightarrow e \gamma)$ .

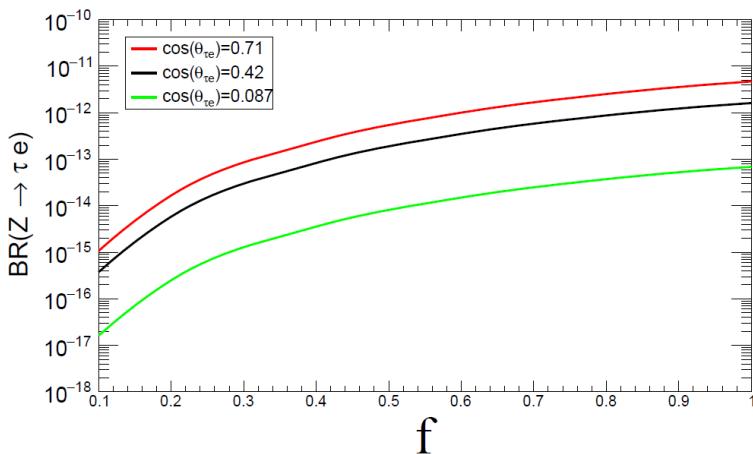




الشكل - 9: تغيرات كل من  $BR(Z \rightarrow \mu e)$ ،  $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$  بدلالة  $f$ .

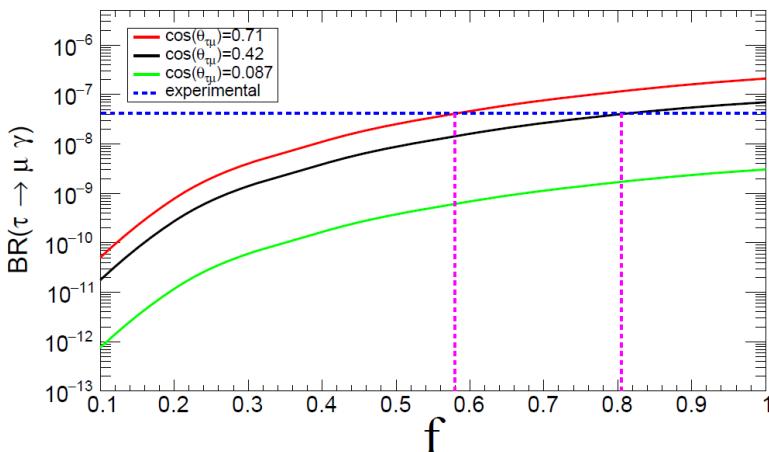
نلاحظ من الشكل (10) تزايد قيم كلاً من  $BR(Z \rightarrow \tau e)$ ،  $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$  مع ازدياد قيم المعامل  $f$  من 0.1 إلى 1. يتجاوز التنبؤ بقيم  $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$  الحد التجريبي الحالي عند  $f = 0.62, 0.88, 1$  للخط الأحمر، الأسود، والأخضر على التوالي. تبلغ في هذه الحالة القيم العددية  $BR(Z \rightarrow \tau e) = 1.12 \times 10^{-12}$  عند  $\cos(\theta_{\tau e}) = 0.71$ ،  $BR(Z \rightarrow \tau e) = 6.88 \times 10^{-14}$  عند  $\cos(\theta_{\tau e}) = 0.42$ ،  $BR(Z \rightarrow \tau e) = 1.15 \times 10^{-12}$  عند  $\cos(\theta_{\tau e}) = 0.087$ . ومنه فإنّ أفضل قيمة لـ  $BR(Z \rightarrow \tau e)$  هي  $BR(Z \rightarrow \tau e) \approx 1.13 \times 10^{-12}$  وذلك عند فرض قيود تفكك  $(\tau \rightarrow e \gamma)$ .

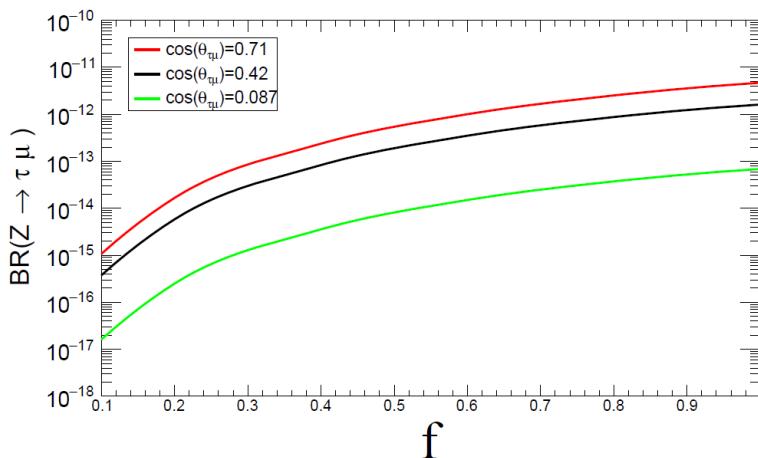




الشكل - 10: تغيرات كل من  $BR(Z \rightarrow \tau e)$ ,  $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$  بدلالة  $f$

نلاحظ من الشكل (11) تزايد قيم كلاً من  $BR(Z \rightarrow \mu \gamma)$ ,  $BR(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ ، و  $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$  مع ازدياد قيم المعامل  $f$  من 0.1 إلى 1. يتجاوز التنبؤ بقيم  $BR(\tau \rightarrow \mu \gamma)$  الحد التجاريي الحالي عند  $f = 0.58, 0.805, 1$  للخط الأحمر، الأسود، والأخضر على التوالي. تبلغ في هذه الحالة القيم العددية  $BR(Z \rightarrow \tau \mu) = 8.97 \times 10^{-13}$  عند  $\cos(\theta_{\tau \mu}) = 0.71$ ،  $BR(Z \rightarrow \tau \mu) = 6.88 \times 10^{-14}$  عند  $\cos(\theta_{\tau \mu}) = 0.087$ ،  $BR(Z \rightarrow \tau \mu) = 8.91 \times 10^{-13}$  عند  $\cos(\theta_{\tau \mu}) = 0.42$ ، و منه فإن أفضل قيمة لـ  $BR(Z \rightarrow \tau \mu)$  هي  $BR(Z \rightarrow \tau \mu) \approx 8.94 \times 10^{-13}$  وذلك عند فرض قيود تكثك  $(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ .





الشكل - 11: تغيرات كل من  $BR(Z \rightarrow \tau\mu)$  بدلالة  $f$ .

## 7- النتائج:

تمت في هذه المقالة دراسة انتهاك النكهة البتونية (LFV) في تفككتابوزون  $Z$  ضمن النموذج القياسي فائق التناظر الأصغر المقيد (CMSSM) والمدد بآلية التأرجح من النوع الأول فائقة التناظر (SUSY Type-I). يمكن تحقيق آلية التأرجح من النوع الأول بإضافة حقل نترينو فائق التناظر، مما يولد كتلة للنترينو الخفيف. في البداية تمت دراسة العلاقات الرياضية التحليلية لنسب التفرع (BRs) لكل من تفككتابوزون النكهة البتونية للبوزون  $Z$  ( $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$  وللتفككتابوزون الإشعاعية ( $BR(Z \rightarrow l_i \gamma)$ ). ثم تمت الدراسة العددية لنسب التفرع ( $BR(Z \rightarrow l_i l_j)$ ) ضمن هذا النموذج بعد تطبيق القيود التالية: الحد الأعلى لكتلة النترينو الخفيف هو  $0.8 \text{ eV}$ ، انحفاظ الزوجية- $R$ ، إنّ أخف جسيم فائق التناظر في النموذج المدروس هو النترالينو. بالإضافة إلى ذلك، يجب أن تكون كتل الجسيمات فائقة التناظر (الشارجينو، البتونات، النترينوات، والنترالينو) أعلى من الحدود الدنيا التجريبية الموضوعة من قبل التجارب الحديثة. بالإضافة إلى ذلك، تم تطبيق القيود التجريبية للتفككتابوزون ( $BR(Z \rightarrow l_i \gamma)$ ) وفرض حدود نظرية الاضطراب على قيم معاملات النموذج المدروس. من أجل الحصول على كتلة صغيرة للنترينو الخفيف فإنه يجب أن تكون قيمة  $M_R = 5 \times 10^{13} \text{ GeV}$  يُظهر الجدول (6) القيم العظمى لنسب تفرع انتهاك النكهة البتونية في تفككتابوزون  $Z$ .

الجدول (6): الحدود العليا لتفككات Z LFV. تشير النتائج العددية-1 (النتائج العددية-2) إلى النتائج بدون تقييد (مع تقييد) الشروط من التفكك  $l_i \rightarrow l_j \gamma$ .

FCC-ee/CEPC	LHC (95% CL)	النتائج العددية-2	النتائج العددية-1	تفككات Z LFV
$10^{-9}$	$7.00 \times 10^{-6}$	$1.13 \times 10^{-12}$	$1.00 \times 10^{-9}$	$BR(Z \rightarrow \tau e)$
$10^{-9}$	$7.20 \times 10^{-6}$	$8.94 \times 10^{-12}$	$1.00 \times 10^{-9}$	$BR(Z \rightarrow \tau \mu)$
$10^{-8} - 10^{-10}$	$2.62 \times 10^{-7}$	$1.50 \times 10^{-18}$	$5.00 \times 10^{-10}$	$BR(Z \rightarrow \mu e)$

تقع هذه القيم خارج الحدود العليا التجريبية لمصادم الهايدرونات الكبير (LHC)، في حين أنها تتوافق مع حساسية المصادمات المستقبلية (FCC-ee/CEPC) في حالة عدم تطبيق قيود التفكك  $l_i \rightarrow l_j \gamma$  كما هو موضح في الجدول (6). بعد تطبيق قيود التفكك  $l_i \rightarrow l_j \gamma$ ، فإن النتائج المذكورة أعلاه تظهر قمعاً إضافياً يبلغ حوالي  $10^{-3}$  لـ  $BR(Z \rightarrow \tau \mu e)$  و  $10^{-8}$  لـ  $BR(Z \rightarrow \mu e)$  عند مقارنتها بحساسية المصادمات المستقبلية (FCC-ee/CEPC). وبالتالي فإن التنبؤات العددية لنسب التفرع هي أقل بعده مراتب من الحدود التجريبية في الوقت الحالي.

## 8- المراجع:

- [1] ATLAS Collaboration, “Search for Lepton-Flavor Violation in Z-Boson Decays with  $\tau$  Leptons with the ATLAS Detector,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, no. 27, p. 271801, Dec. 2021, doi: 10.1103/PhysRevLett.127.271801.
- [2] M. Ardu and G. Pezzullo, “Introduction to Charged Lepton Flavor Violation,” *Universe*, vol. 8, no. 6, p. 299, May 2022, doi: 10.3390/universe8060299.
- [3] V. De Romeri, M. J. Herrero, X. Marcano, and F. Scarella, “Lepton flavor violating Z decays: A promising window to low scale seesaw neutrinos,” *Physical Review D*, vol. 95, no. 7, p. 075028, Apr. 2017, doi: 10.1103/PhysRevD.95.075028.
- [4] P. Minkowski, “ $\mu \rightarrow e\gamma$  at a rate of one out of 109 muon decays?,” *Physics Letters B*, vol. 67, no. 4, pp. 421–428, Apr. 1977, doi: 10.1016/0370-2693(77)90435-X.
- [5] R. N. Mohapatra and G. Senjanović, “Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation,” *Phys Rev Lett*, vol. 44, no. 14, pp. 912–915, Apr. 1980, doi: 10.1103/PhysRevLett.44.912.

- [6] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino masses in  $SU(2) \otimes U(1)$  theories,” *Physical Review D*, vol. 22, no. 9, pp. 2227–2235, Nov. 1980, doi: 10.1103/PhysRevD.22.2227.
- [7] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino decay and spontaneous violation of lepton number,” *Physical Review D*, vol. 25, no. 3, pp. 774–783, Feb. 1982, doi: 10.1103/PhysRevD.25.774.
- [8] ATLAS Collaboration, “Search for the lepton flavor violating decay  $Z e \mu$  in pp collisions at  $s=8$  TeV with the ATLAS detector,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 7, p. 72010, Oct. 2014, doi: 10.1103/PhysRevD.90.072010.
- [9] K.-S. Sun, J.-B. Chen, X.-Y. Yang, and S.-K. Cui, “The LFV decays of Z boson in Minimal R-symmetric Supersymmetric Standard Model,” *Chinese Physics C*, vol. 43, no. 4, p. 043101, Apr. 2019, doi: 10.1088/1674-1137/43/4/043101.
- [10] D. Jurčiukonis and L. Lavoura, “Two-body lepton-flavour-violating decays in a 2HDM with soft family-lepton-number breaking,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 3, p. 106, Mar. 2022, doi: 10.1007/JHEP03(2022)106.
- [11] K.-S. Sun, W.-H. Zhang, J.-B. Chen, H.-B. Zhang, and Q. Yan, “Lepton flavor violating decays of vector mesons in the MRSSM\*,” *Chinese Physics C*, vol. 47, no. 7, p. 073106, Jul. 2023, doi: 10.1088/1674-1137/acd3da.
- [12] A. Abada, A. J. R. Figueiredo, J. C. Romão, and A. M. Teixeira, “Probing the supersymmetric type III seesaw: LFV at low-energies and at the LHC,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 8, p. 99, Aug. 2011, doi: 10.1007/JHEP08(2011)099.
- [13] W. Altmannshofer, C. Caillol, M. Dam, S. Xella, and Y. Zhang, “Charged Lepton Flavour Violation in Heavy Particle DEcays,” May 2022.
- [14] A. Collaboration, “Search for the charged-lepton-flavor-violating decay  $Z e \mu$  in pp collisions at  $s=13$  TeV with the ATLAS detector,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, no. 3, p. 32015, Aug. 2023, doi: 10.1103/PhysRevD.108.032015.
- [15] R. S. Hundi, “Lepton flavor violating Z and Higgs decays in the scotogenic model,” *The European Physical Journal C*, vol. 82, no. 6, p. 505, Jun. 2022, doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10453-3.
- [16] L. Calibbi, X. Marcano, and J. Roy, “Z lepton flavour violation as a probe for new physics at future  $e^+e^-$  colliders,” *The European Physical Journal C*, vol. 81, no. 12, p. 1054, Dec. 2021, doi: 10.1140/epjc/s10052-021-09777-3.
- [17] J. Cao, Z. Xiong, and J. M. Yang, “Lepton flavor violating Z-decays in supersymmetric seesaw model,” *The European Physical Journal C*, vol. 32, no. 2, pp. 245–252, Jan. 2004, doi: 10.1140/epjc/s2003-01391-1.

- [18] J. I. Illana and M. Masip, “Lepton Flavor Violation in Z and Lepton Decays in Supersymmetric Models,” *Physical Review D*, vol. 67, no. 3, p. 035004, Feb. 2003, doi: 10.1103/PhysRevD.67.035004.
- [19] X.-X. Dong, S.-M. Zhao, X.-J. Zhan, Z.-J. Yang, H.-B. Zhang, and T.-F. Feng, “ $Z \rightarrow l \pm l \mp j$  processes in the BLMSSM,” *Chinese Physics C*, vol. 41, no. 7, p. 073103, Jul. 2017, doi: 10.1088/1674-1137/41/7/073103.
- [20] A. Méndez and Ll. M. Mir, “Analysis of the decay  $Z \rightarrow l \pm l \mp \mu \nu$  in supersymmetric theories,” *Physical Review D*, vol. 40, no. 1, pp. 251–254, Jul. 1989, doi: 10.1103/PhysRevD.40.251.
- [21] I. CORTÉS-MALDONADO, A. MOYOTL, and G. TAVARES-VELASCO, “Lepton flavor violating decay  $Z \rightarrow l_i l_j$  in the 331 model,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 26, no. 24, pp. 4171–4185, Sep. 2011, doi: 10.1142/S0217751X11054474.
- [22] Y.-T. Wang *et al.*, “Z boson decays  $Z \rightarrow l_i l_j \mp$  and Higgs boson decays  $h \rightarrow l_i l_j \mp$  with lepton flavor violation in a U(1) extension of the MSSM,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 5, p. 055044, Sep. 2022, doi: 10.1103/PhysRevD.106.055044.
- [23] A. Vicente, “Lepton Flavor Violation beyond the MSSM,” *Advances in High Energy Physics*, vol. 2015, pp. 1–22, 2015, doi: 10.1155/2015/686572.
- [24] C. Weiβ, “Lepton Flavor Violation in Supersymmetric Seesaw III Models,” Thesis (Diploma), Institute of Theoretical Physics and Astrophysics - Julius Maximilian University of Würzburg, 2012. Accessed: Apr. 13, 2025. [Online]. Available: <https://www.physik.uni-wuerzburg.de/en/tp2/research/publications/diploma-theses/>
- [25] M. Hirsch, F. R. Joaquim, and A. Vicente, “Constrained SUSY seesaws with a 125 GeV Higgs,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 11, p. 105, Nov. 2012, doi: 10.1007/JHEP11(2012)105.
- [26] M. Hirsch, L. Reichert, and W. Porod, “Supersymmetric mass spectra and the seesaw scale,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 5, p. 86, May 2011, doi: 10.1007/JHEP05(2011)086.
- [27] S. S. AbdusSalam *et al.*, “Benchmark models, planes, lines and points for future SUSY searches at the LHC,” *The European Physical Journal C*, vol. 71, no. 12, p. 1835, Dec. 2011, doi: 10.1140/epjc/s10052-011-1835-7.
- [28] M. E. Gómez, S. Heinemeyer, and M. Rehman, “Lepton Flavor Violating Higgs Boson Decays in Supersymmetric High Scale Seesaw Models,” *Journal of Particle Physics*, vol. 1, no. 1, Jul. 2017, doi: 10.22606/jpp.2017.11003.
- [29] J. N. Esteves, M. Hirsch, W. Porod, J. C. Romao, J. W. F. Valle, and A. V. del Moral, “Flavour violation at the LHC: type-I versus type-II seesaw in minimal

- supergravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 05, pp. 003–003, May 2009, doi: 10.1088/1126-6708/2009/05/003.
- [30] M. Hirsch, W. Porod, Ch. Weiβ, and F. Staub, “Supersymmetric type-III seesaw mechanism: Lepton flavor violation and LHC phenomenology,” *Physical Review D*, vol. 87, no. 1, p. 013010, Jan. 2013, doi: 10.1103/PhysRevD.87.013010.
- [31] C. Arbeláez, M. Hirsch, and L. Reichert, “Supersymmetric mass spectra and the seesaw type-I scale,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 2, p. 112, Feb. 2012, doi: 10.1007/JHEP02(2012)112.
- [32] L. Calibbi, D. Chowdhury, A. Masiero, K. M. Patel, and S. K. Vempati, “Status of supersymmetric type-I seesaw in SO(10) inspired models,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 11, p. 40, Nov. 2012, doi: 10.1007/JHEP11(2012)040.
- [33] X. Marcano, *Lepton Flavor Violation from Low Scale Seesaw Neutrinos with Masses Reachable at the LHC*, 1st ed. Cham: Springer International Publishing, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-94604-7.
- [34] J. Yang, “Lepton flavor violating Z-boson decays at GigaZ as a probe of supersymmetry,” *Sci China Phys Mech Astron*, vol. 53, no. 11, pp. 1949–1952, Nov. 2010, doi: 10.1007/s11433-010-4146-3.
- [35] W. Porod, F. Staub, and A. Vicente, “A flavor kit for BSM models,” *The European Physical Journal C*, vol. 74, no. 8, p. 2992, Aug. 2014, doi: 10.1140/epjc/s10052-014-2992-2.
- [36] X.-J. Bi, Y.-B. Dei, and X.-Y. Qi, “Lepton flavor violation in supersymmetric SO(10) grand unified models,” *Physical Review D*, vol. 63, no. 9, p. 096008, Apr. 2001, doi: 10.1103/PhysRevD.63.096008.
- [37] S. Navas et al. (Particle Data Group), “Review of Particle Physics,” *Physical Review D*, vol. 110, no. 3, p. 030001, Aug. 2024, doi: 10.1103/PhysRevD.110.030001.
- [38] V. Hajahmad and M. Alsayed Ali, “Lepton Flavor Violation of Z Gauge Boson Decays in Supersymmetric Type-III Seesaw Model,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 55, no. 5, p. 200, Oct. 2025, doi: 10.1007/s13538-025-01830-w.
- [39] F. Staub, “From superpotential to model files for FeynArts and CalcHep/CompHep,” *Comput Phys Commun*, vol. 181, no. 6, pp. 1077–1086, Jun. 2010, doi: 10.1016/j.cpc.2010.01.011.
- [40] F. Staub, “SARAH 4: A tool for (not only SUSY) model builders,” *Comput Phys Commun*, vol. 185, no. 6, pp. 1773–1790, Jun. 2014, doi: 10.1016/j.cpc.2014.02.018.
- [41] M. D. Goodsell, K. Nickel, and F. Staub, “Two-loop Higgs mass calculations in supersymmetric models beyond the MSSM with SARAH and SPheno,” *The*

- European Physical Journal C*, vol. 75, no. 1, p. 32, Jan. 2015, doi: 10.1140/epjc/s10052-014-3247-y.
- [42] J. Bernigaud, A. K. Forster, B. Herrmann, S. F. King, W. Porod, and S. J. Rowley, “Data-driven analysis of a SUSY GUT of flavour,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 5, p. 156, May 2022, doi: 10.1007/JHEP05(2022)156.
- [43] J. N. Esteves, J. C. Romao, M. Hirsch, F. Staub, and W. Porod, “Supersymmetric type-III seesaw mechanism: Lepton flavor violating decays and dark matter,” *Physical Review D*, vol. 83, no. 1, p. 013003, Jan. 2011, doi: 10.1103/PhysRevD.83.013003.
- [44] KATRIN Collaboration, “Direct neutrino-mass measurement with sub-electron-volt sensitivity,” *Nat Phys*, vol. 18, no. 2, pp. 160–166, Feb. 2022, doi: 10.1038/s41567-021-01463-1.
- [45] M. Hirsch, S. Kaneko, and W. Porod, “Supersymmetric type-II seesaw mechanism: CERN LHC and lepton flavor violating phenomenology,” *Physical Review D*, vol. 78, no. 9, p. 093004, Nov. 2008, doi: 10.1103/PhysRevD.78.093004.
- [46] BELLE Collaboration, “Search for lepton-flavor-violating tau-lepton decays to  $\ell\gamma$  at Belle,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 10, p. 19, Oct. 2021, doi: 10.1007/JHEP10(2021)019.
- [47] A. M. Baldini *et al.*, “Search for the Lepton Flavour Violating Decay  $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$  with the Full Dataset of the MEG Experiment,” *The European Physical Journal C*, vol. 76, no. 8, p. 434, Aug. 2016, doi: 10.1140/epjc/s10052-016-4271-x.